

---

# Il problema del tubo spesso

Soluzione analitica e modello ad Elementi Finiti

---

## 1 RICERCA DI UNA SOLUZIONE ANALITICA

I tubi trovano larga applicazione in numerosi contesti nell'ingegneria civile ed industriale: condotte forzate, impianti per la produzione di energia, strutture portanti di edifici per citare alcuni esempi. Nel caso in cui lo spessore del tubo è molto basso rispetto al raggio la determinazione dello stato di sforzo può essere ottenuta imponendo una relazione di equilibrio sotto l'ipotesi di distribuzione costante dello sforzo circonferenziale lungo la sezione (formula di Mariotte). Al crescere dello spessore questa approssimazione diventa sempre meno realistica. Nel seguito è presentata la teoria dei tubi a grande spessore che costituisce una soluzione valida per qualsiasi rapporto spessore/raggio.

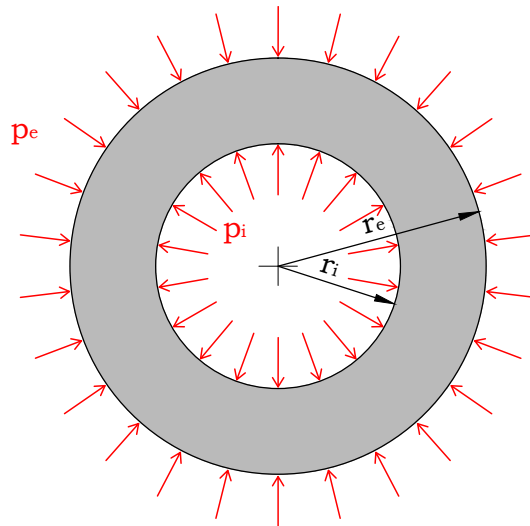


Figure 1.1: Il tubo spesso

Il problema strutturale è compiutamente definito tramite l'imposizione delle equazioni di equilibrio, di congruenza e di legame costitutivo.

### 1.1 STATO DI SFORZO ED EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Si considera una porzione infinitesima di sezione delimitata da due rette radiali centrate nel baricentro con apertura  $d\vartheta$  e da due circonferenze concentriche di raggio  $r$  e  $r + dr$ . L'equilibrio della porzione così definita è garantito dalla presenza degli sforzi circolari  $\sigma_\vartheta$  (che, per la simmetria del problema, sono ovviamente indipendenti dall'angolo) e radiali  $\sigma_r$  variabili lungo il raggio (figura 1.2).

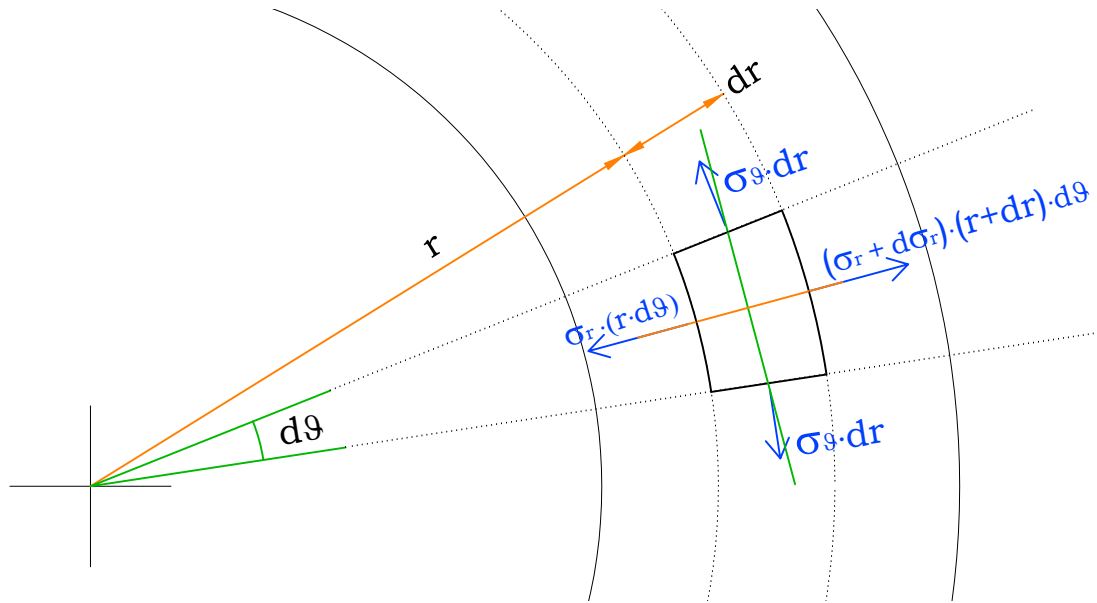


Figure 1.2: Equilibrio della porzione infinitesima

La simmetria del problema permette di ricondurre l'equazione di equilibrio circonferenziale ad un'identità automaticamente verificata. Per quanto riguarda l'equilibrio in direzione radiale i contributi che compaiono sono quelli derivanti dalle forze radiali e dalle componenti delle forze circolari proiettate in direzione radiale.

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\vartheta - \sigma_r r d\vartheta - 2\sigma_\vartheta dr \frac{d\vartheta}{2} = 0 \quad (1.1)$$

Sviluppando i prodotti si ottiene

$$\sigma_r r d\vartheta + \sigma_r dr d\vartheta + d\sigma_r r d\vartheta + d\sigma_r dr d\vartheta - \sigma_r r d\vartheta - \sigma_\vartheta dr d\vartheta = 0 \quad (1.2)$$

Il termine  $d\sigma_r dr d\vartheta$  è un infinitesimo di ordine superiore e quindi a rigore trascurabile. L'equazione di equilibrio in direzione radiale assume quindi la forma semplificata

$$\boxed{\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0} \quad (1.3)$$

## 1.2 STATO DI DEFORMAZIONE ED EQUAZIONI DI CONGRUENZA

Si considera una porzione infinitesima di circonferenza di raggio  $r$  delimitata dalle due rette radiali centrate nel baricentro con apertura  $d\vartheta$ . La simmetria del problema permette di affermare che l'unico cinematismo ammissibile consiste in un'espansione omotetica della stessa definibile attraverso lo spostamento radiale  $u_r$  (figura 1.3). Lo stato di deformazione è diret-

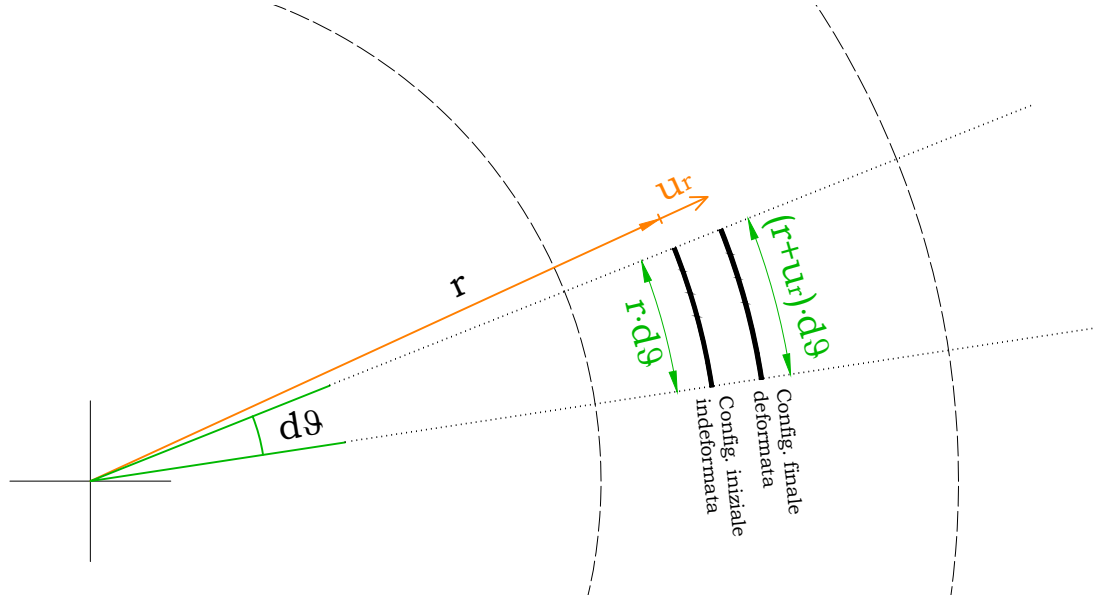


Figure 1.3: Spostata in condizioni di assialsimmetria

tamente esprimibile in funzione dell'unico spostamento ammesso

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{(r + u_r)d\vartheta - rd\vartheta}{rd\vartheta} = \frac{u_r}{r} \quad (1.4)$$

Derivando la deformazione circonferenziale rispetto al raggio si ottiene

$$\frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{\varepsilon_r}{r} - \frac{\varepsilon_\vartheta}{r} \quad (1.5)$$

Pervenendo all'equazione di congruenza

$$\boxed{\frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\vartheta}{r} = 0} \quad (1.6)$$

## 1.3 LEGAME COSTITUTIVO

Il legame costitutivo relaziona lo stato deformativo con quello tensionale attraverso parametri propri del materiale. Nel caso di comportamento indefinitamente Elastico e Lineare la risposta del materiale è descrivibile da due parametri indipendenti. Nella formulazione che segue,

scritta per problema piano nelle deformazioni (ipotesi di tubo sufficientemente lungo), il legame è scritto in funzione del modulo elastico  $E$  e del coefficiente di Poisson  $\nu$ .

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\vartheta] \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r] \quad (1.8)$$

#### 1.4 SOLUZIONE

Derivando la prima equazioni di legame costitutivo si ottiene:

$$\frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \frac{d\sigma_\vartheta}{dr} - \nu \frac{d(\sigma_r + \sigma_\vartheta)}{dr} \right] \quad (1.9)$$

Sottraendo la seconda equazione costitutiva con la prima si ottiene

$$\frac{\varepsilon_\vartheta - \varepsilon_r}{r} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_r}{r} = \frac{d\sigma_r}{dr} \frac{1+\nu}{E} \quad (1.10)$$

Sostituendo questi due risultati nella congruenza si perviene alla forma

$$\frac{1+\nu}{E} \left[ \frac{d\sigma_\vartheta}{dr} - \nu \frac{d(\sigma_\vartheta + \sigma_r)}{dr} + \frac{d\sigma_r}{dr} \right] = 0 \quad (1.11)$$

Da cui si ottiene

$$\frac{(1+\nu)(1-\nu)}{E} \frac{d(\sigma_\vartheta + \sigma_r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\sigma_\vartheta + \sigma_r)}{dr} = 0 \quad (1.12)$$

La somma dei due sforzi deve quindi essere costante rispetto ad  $r$

$$\sigma_\vartheta + \sigma_r = 2K \quad \Rightarrow \quad \sigma_\vartheta = 2K - \sigma_r \quad (1.13)$$

Inserendo il presente risultato nell'equilibrio si ottiene un'equazione differenziale ordinaria dipendente dal solo sforzo  $\sigma_r$

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} - 2K + 2\sigma_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = K + \frac{C}{r^2} \quad (1.14)$$

Le costanti incognite possono essere determinate tramite l'imposizione delle condizioni al contorno

$$\begin{cases} \sigma_r(R_i) = -p_i & K + C/R_i^2 = -p_i \\ \sigma_r(R_e) = -p_e & K + C/R_e^2 = -p_e \end{cases} \quad (1.15)$$

da cui

$$C = \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} (p_e - p_i) \quad (1.16)$$

$$K = \frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} \quad (1.17)$$

Note le costanti di integrazione dipendenti dalla geometria e dalle pressioni è immediato calcolare i valori di sforzo nel tubo che qui sono riassunti:

$$\boxed{\sigma_r = K + \frac{C}{r^2}; \quad \sigma_\vartheta = K - \frac{C}{r^2}; \quad \sigma_z = 2\nu K} \quad (1.18)$$

## 2 ANALISI AD ELEMENTI FINITI

Si vuole simulare la risposta meccanica in regime elastico di un tubo spesso in acciaio soggetto ad una sovrappressione interna. I dati del problema sono i seguenti:

Geometria	Materiale	Azioni esterne
$r_i = 150\text{mm}$	$E = 210000\text{ MPa}$	$p_i = 100\text{ MPa}$
$r_e = 200\text{mm}$	$\nu = 0.3$	$p_e = 10\text{ MPa}$

### 2.1 DEFINIZIONE DEL MODELLO GEOMETRICO

Una volta lanciato il programma é necessario definire il tipo di analisi da condurre. Nel nostro caso, trattandosi di un problema strutturale selezioneremo la voce **With Standard/Explicit Model**

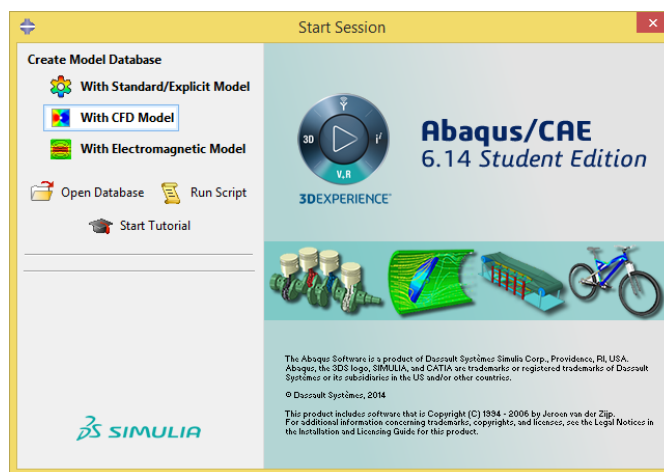


Figure 2.1: Schermata iniziale

#### 2.1.1 MODULO PART

Il programma entra quindi nel modulo **Part** che permette di costruire la geometria del problema. Selezionando il comando *Create Part* si definisce la tipologia di spazio e di problema in oggetto (figura 2.2). Lo spazio di modello é  $2D$  e il problema coinvolge un corpo *deformabile*. La dimensione approssimativa dello spazio, scelta in funzione delle dimensioni del problema, si assume pari a 0.5. É importante rimarcare come un codice ad Elementi Finiti cosí impostato non prevede l'inserimento esplicito di Unitá di Misura, per questa ragione é essenziale utilizzare valori di grandezze tra di loro coerenti. Una scelta potrebbe essere quindi quella di convertire le quantità nelle Unitá di Misura fondamentali del Sistema Internazionale: metri  $m$  per le lunghezze, secondi  $s$  per il tempo, newton  $N$  per le forze.

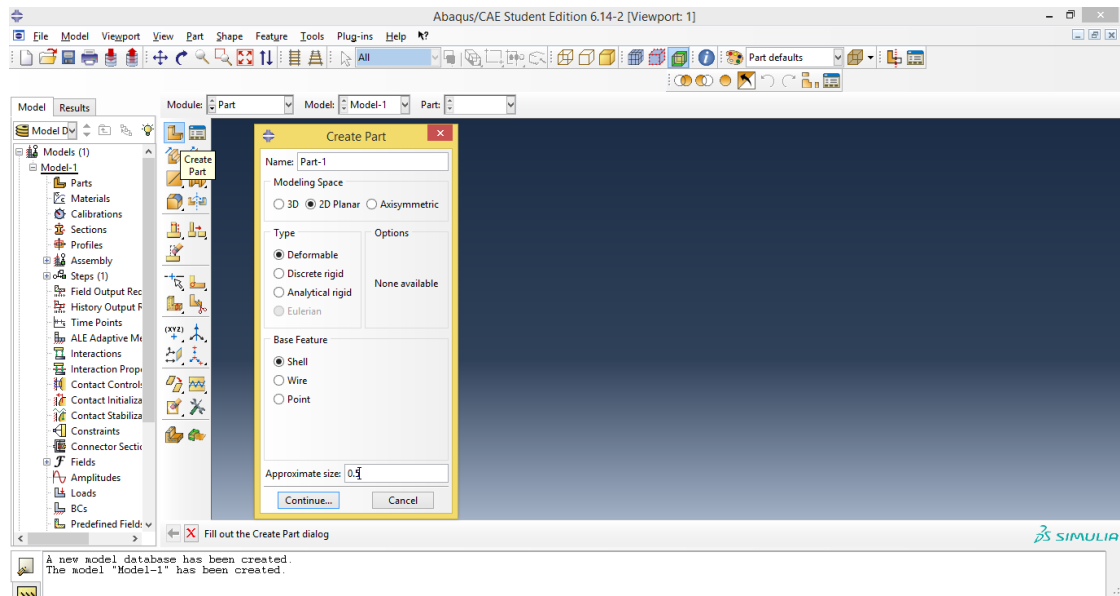


Figure 2.2: Creazione della parte

La geometria del problema prevede la presenza di due circonferenze concentriche: quella interna di raggio  $r_e = 0.20 \text{ m}$  e quella esterna di raggio  $r_i = 0.15 \text{ m}$ . Con il comando *Create Circle* è possibile tracciare un cerchio tramite la definizione delle coordinate del centro e di un punto della circonferenza. Nel caso in oggetto è sufficiente inserire progressivamente le coordinate (0,0); (0,0.2) per la circonferenza esterna e (0,0); (0,0.15) per quella interna (figura 2.3). Le entità geometriche sono completamente tracciate, si procede premendo la *x* rossa posta a fianco del blocco delle coordinate e premere su *Done*.

Prima di abbandonare il modulo **Part** introduciamo alcune ulteriori entità geometriche (punti e linee) che si serviranno per imporre vincoli o per estrarre valori specifici. Per l'inserimento dei punti si segue il percorso dal menù a tendina superiore:

*Tools - Datum - Point - Enter Coordinates*

con coordinate (0.2, 0.0, 0.0); (0.0, -0.2, 0.0); (-0.2, 0.0, 0.0); (0.15, 0.0, 0.0); (0.0, -0.15, 0.0); (-0.15, 0.0, 0.0);.

Per l'inserimento di una linea si segue il percorso:

*Tools - Partition - Face - Use shortest path between 2 points*

collegando i due punti precedentemente creati con coordinate [(0.0, -0.2, 0.0); (-0.15, 0.0, 0.0)]; [(0.2, 0.0, 0.0); (0.15, 0.0, 0.0)]; [(0.15, 0.0, 0.0); (0.20, 0.0, 0.0)] e selezionando *Create Partition*. Il risultato finale è riportato in figura (figura 2.4)

### 2.1.2 MODULO PROPERTY

Nel modulo **Property** si definiscono le caratteristiche dei materiali e delle sezioni coinvolte. Con *Create material* si definiscono le proprietà elastiche del materiale. Per il problema in oggetto il nome scelto materiale è *Acciaio* e le proprietà elastiche sono  $E = 210000000000 \text{ N/m}^2$  e  $\nu = 0.3$  (figura 2.5, 2.6).

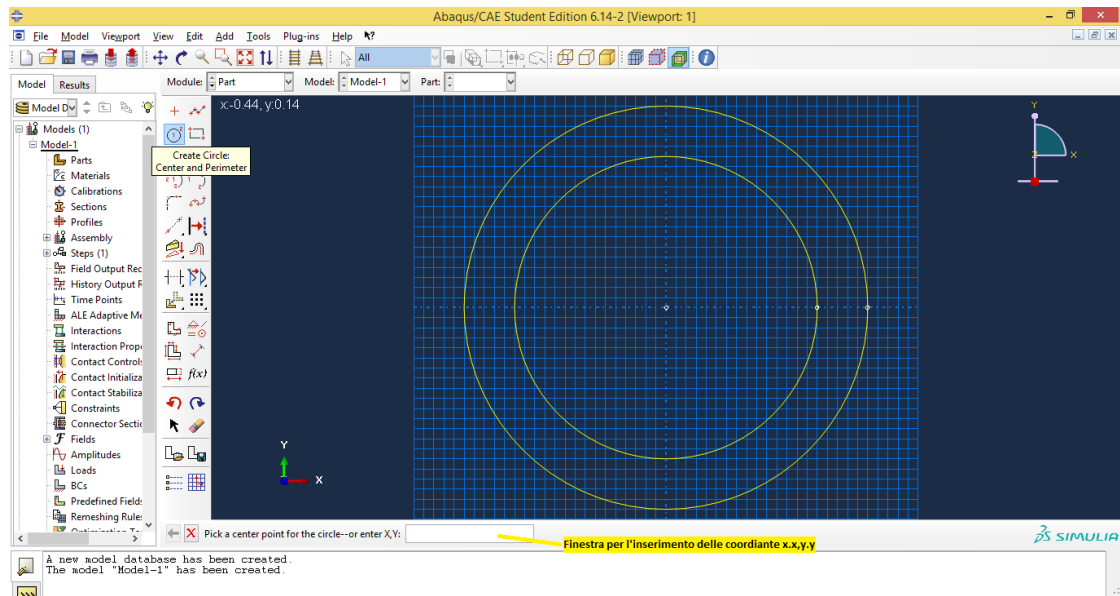


Figure 2.3: Tracciamento delle circonferenze

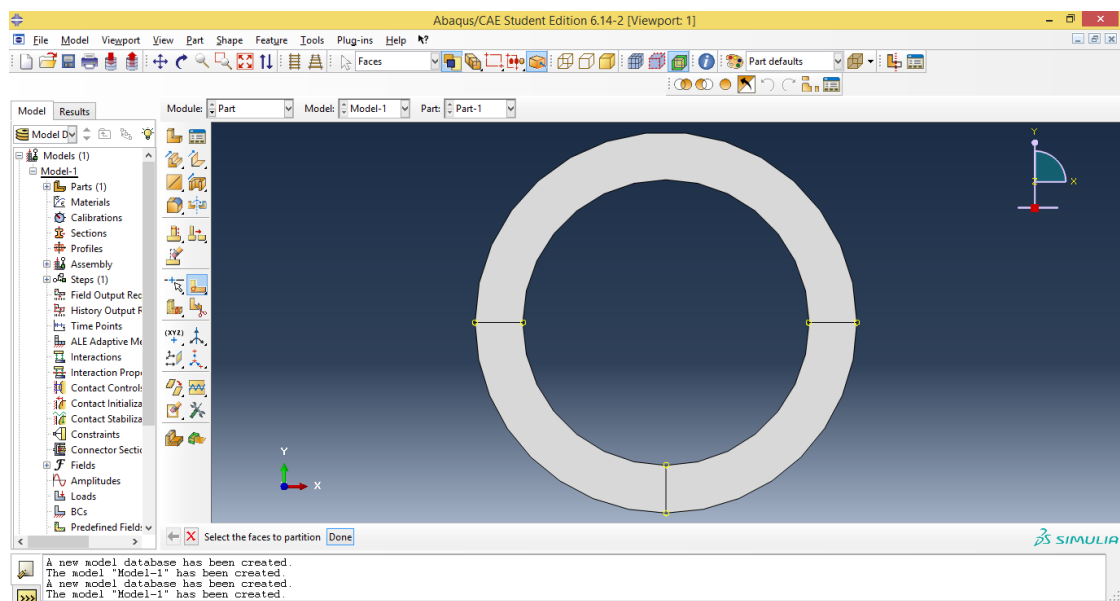


Figure 2.4: Parte geometrica realizzata

Definite le proprietà del materiale si procede con la generazione della "sezione" ovvero un'entità che contiene al suo interno tutte le proprietà fisiche e gli spessori fuori piano dell'oggetto. Questa sezione è chiamata "tubo". L'istruzione viene assegnata selezionando il comando *Create Section* e scegliendo come categoria la sezione solida di tipo omogeneo. Dopo aver

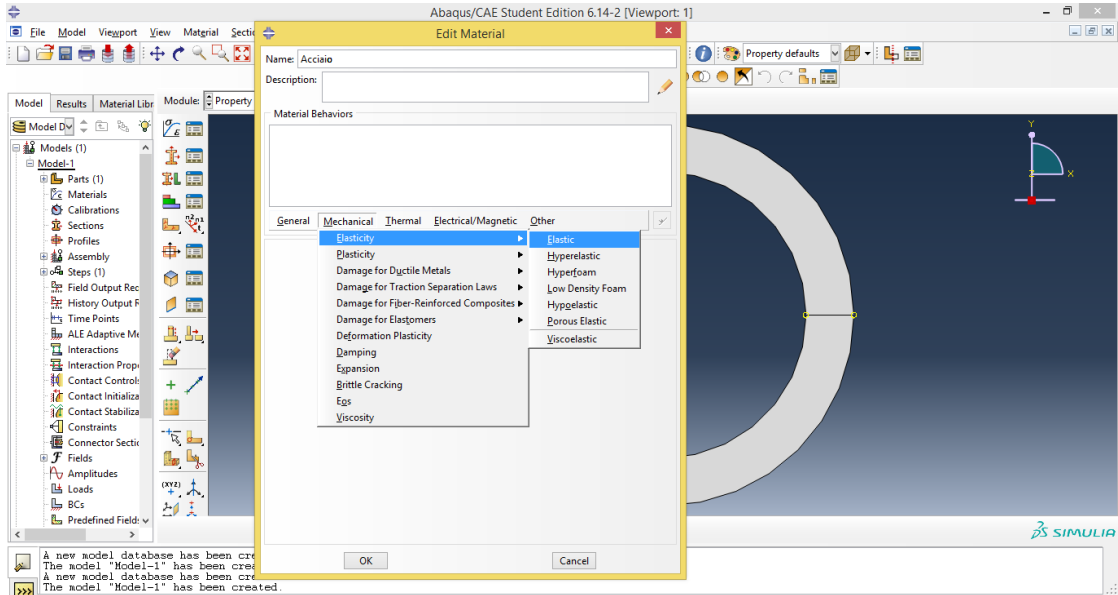


Figure 2.5: Proprietá meccanice materiale

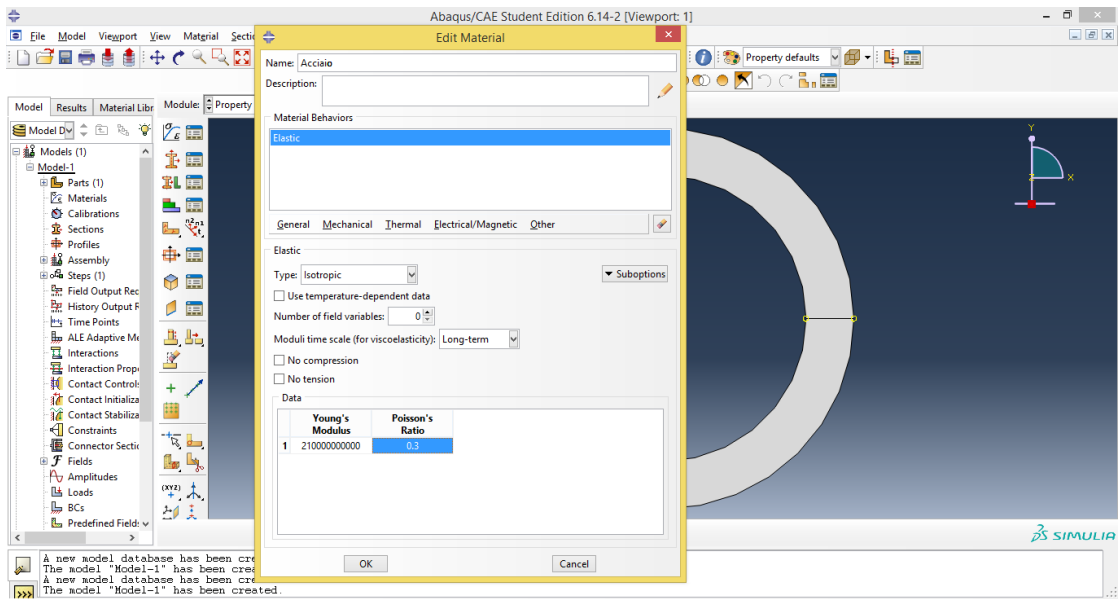


Figure 2.6: Proprietá meccanice materiale

selezionato *Continue* compare la finestra di scelta del materiale, che nel nostro caso é *Acciaio* (figura 2.7, 2.8).

L'ultimo passo consiste nell'assegnare la sezione alla geometria realizzata nel passo precedente. Questa operazione é realizzabile premendo il comando *Assign Section* e selezionando



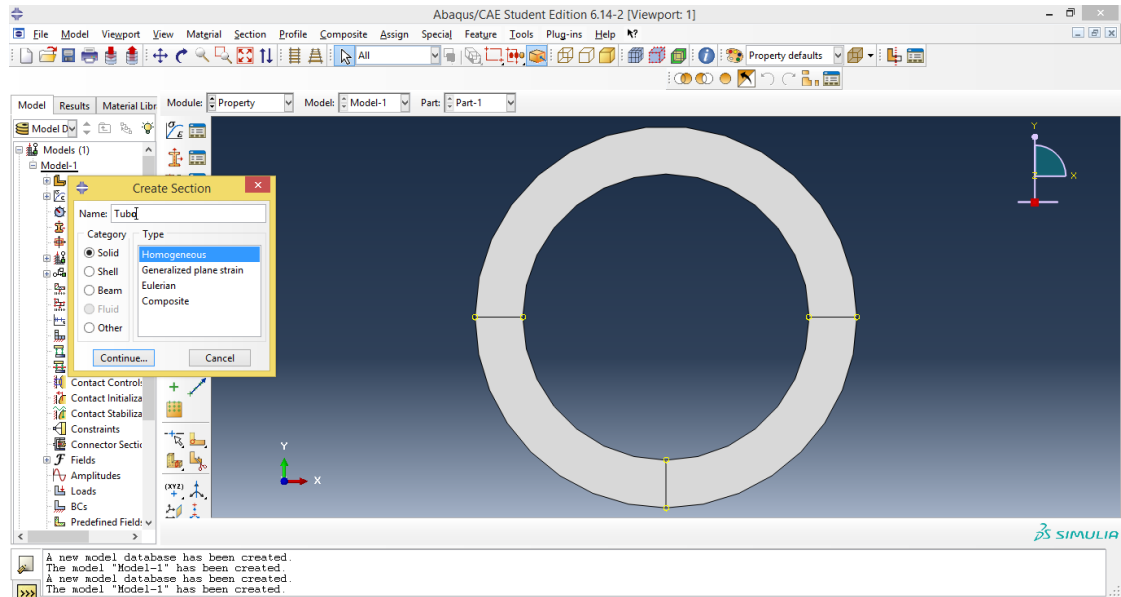


Figure 2.7: Categoria e tipo di sezione

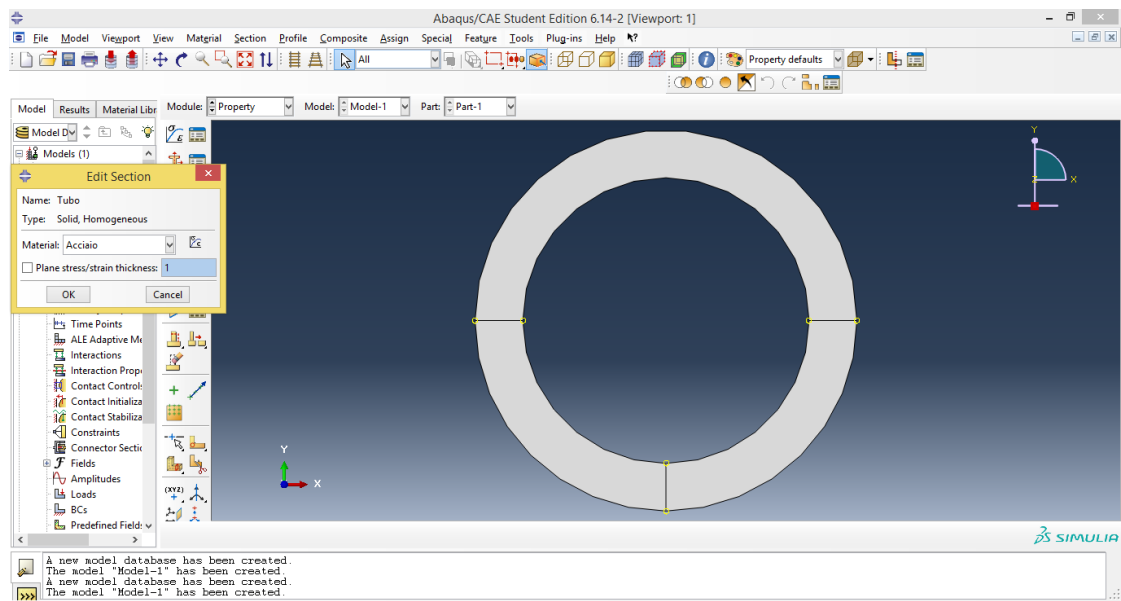


Figure 2.8: Scelta del materiale

la geometria presente nel modello (figura 2.9). La procedura si completa premendo *Done* nella barra inferiore e nella finestra di modifica che compare immediatamente dopo.

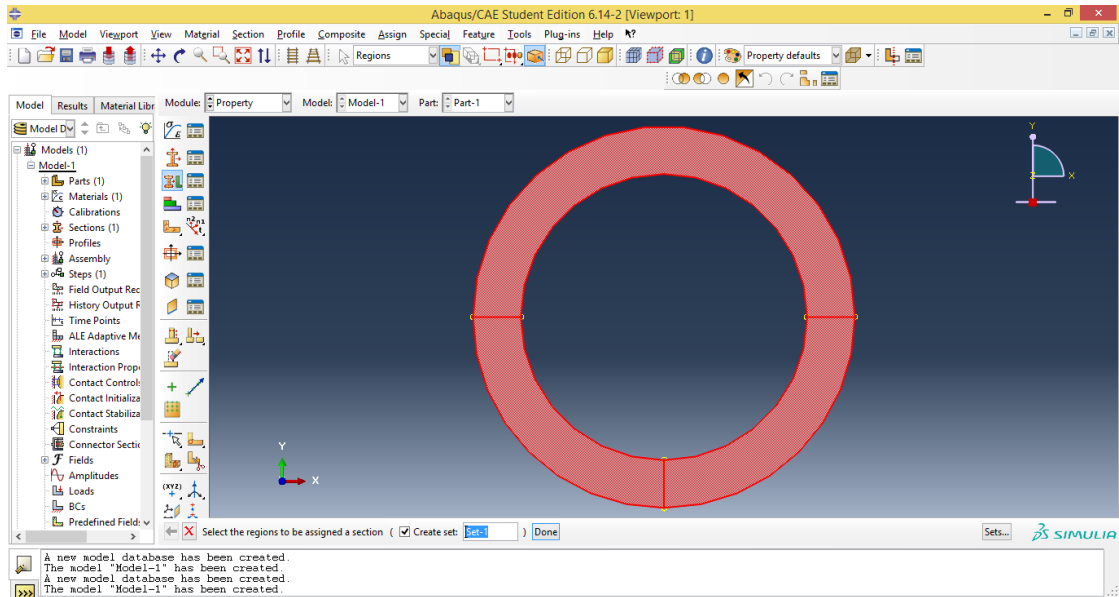


Figure 2.9: Assegnazione della sezione

### 2.1.3 MODULO ASSEMBLY

Tramite il modulo **Assembly** è possibile specificare alcune informazioni utili nell'analisi di sistemi multicorpo. In questo caso, trattandosi di un unico oggetto, è sufficiente premere il comando *Instance part*, selezionare *Independent* e confermare (figura 2.10).

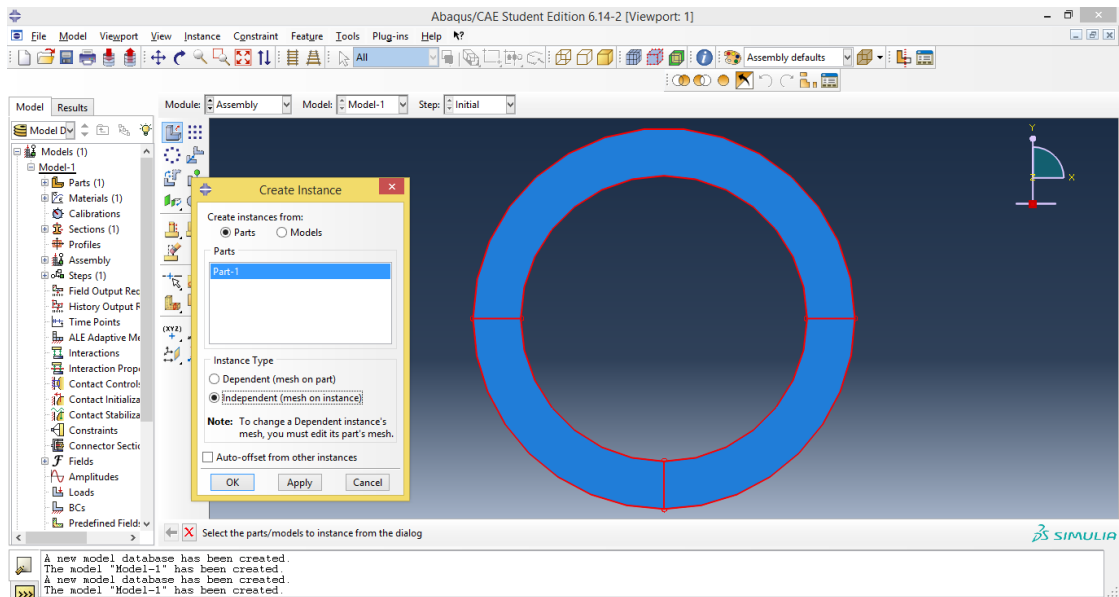


Figure 2.10: Assegnazione della sezione

## 2.1.4 MODULO STEP

Nel modulo **Step** si creano le situazioni d'analisi e si definiscono quali sono i campi di output che si vogliono visualizzare. In *Create step* è possibile nominare e definire il tipo di analisi: nel nostro caso si tratta della valutazione della risposta meccanica di tubo spesso soggetto a differenza di pressione. Il nome scelto dello step è quindi *press\_diff* e il tipo di analisi è statica generale (figura 2.11). Confermando le scelte compare una finestra denominata *Edit step* che contiene parametri da tarare nel caso di analisi non lineare (elasticità non lineare, plasticità, danneggiamento) che come tali non riguardano questo problema. Per questo motivo è sufficiente confermare senza eseguire modifiche. Definito lo step è necessario dichiarare

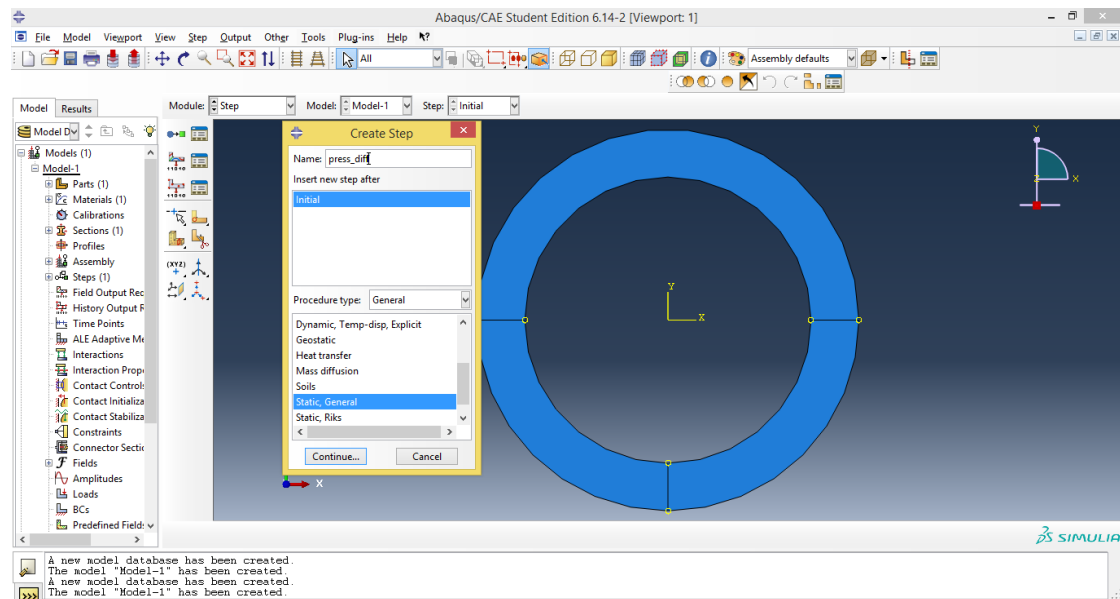


Figure 2.11: Creazione dello step

le quantità che devono essere elaborate in fase di post-processamento. Premendo sul *Create Field Output* è possibile dichiarare al programma le quantità di interesse che in questo caso sono: sforzi  $S$ , deformazioni  $E$ , spostamenti  $U$  (figura 2.12).

## 2.1.5 MODULO LOAD

Il modulo **Load** permette l'assegnazione delle condizioni al contorno di natura statica (carichi esterni) e cinematica (condizioni di vincolo). Nel caso in oggetto i carichi esterni assumono la forma di pressioni (interna  $p_i = 100000000 \text{ N/m}^2$ , esterna  $p_e = 10000000 \text{ N/m}^2$ ).

L'assegnazione avviene tramite il comando *Create Load* e la selezione del tipo di carico *pressure* (figura 2.13). Cliccando su *Continue* il programma attende che selezioniamo il bordo sul quale deve agire la pressione così definita. Una volta scelto compare una finestra in cui dichiarare il valore della pressione e la distribuzione (figura 2.14). La stessa operazione deve essere ripetuta per la pressione esterna e, in generale, per ogni carico presente sulla struttura.

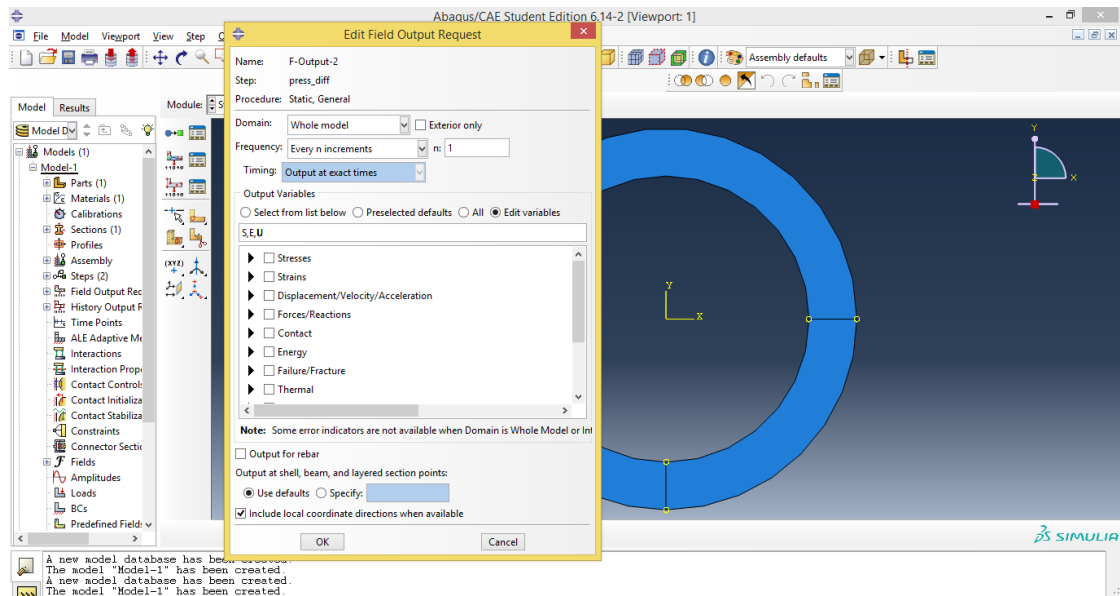


Figure 2.12: Definizione dell'output

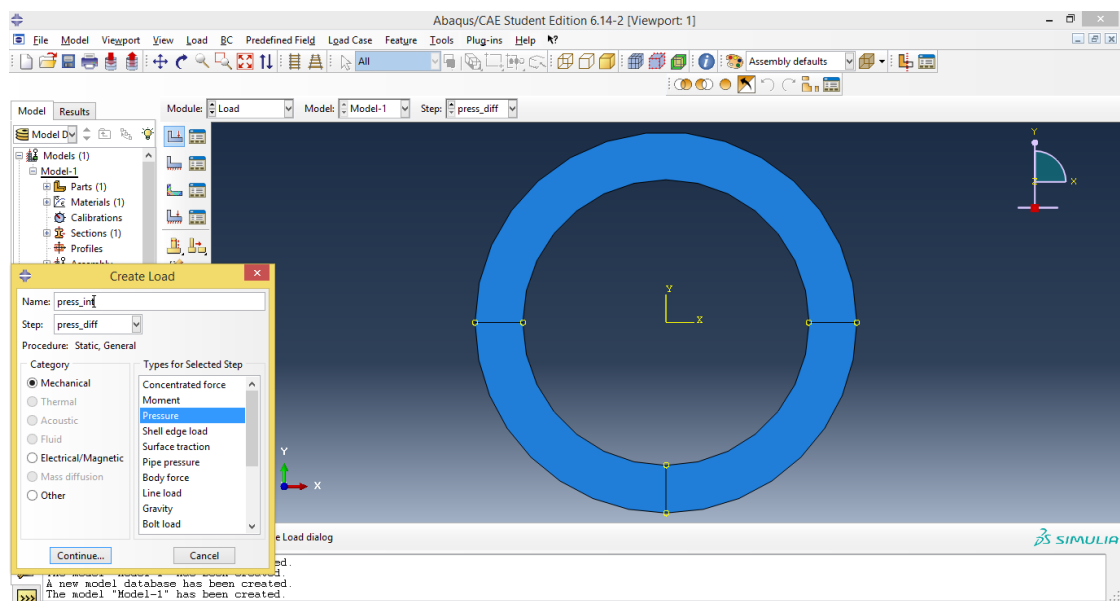


Figure 2.13: Tipo di carico

Le condizioni al contorno di natura geometrica sono introdotte tramite il comando *Create boundary condition*. In questo caso il problema è autoequilibrato ma, per evitare problemi numerici, è consigliabile introdurre un vincolamento fittizio in grado di non perturbare il comportamento deformativo atteso ma sufficiente da rendere la matrice delle rigidezze ben

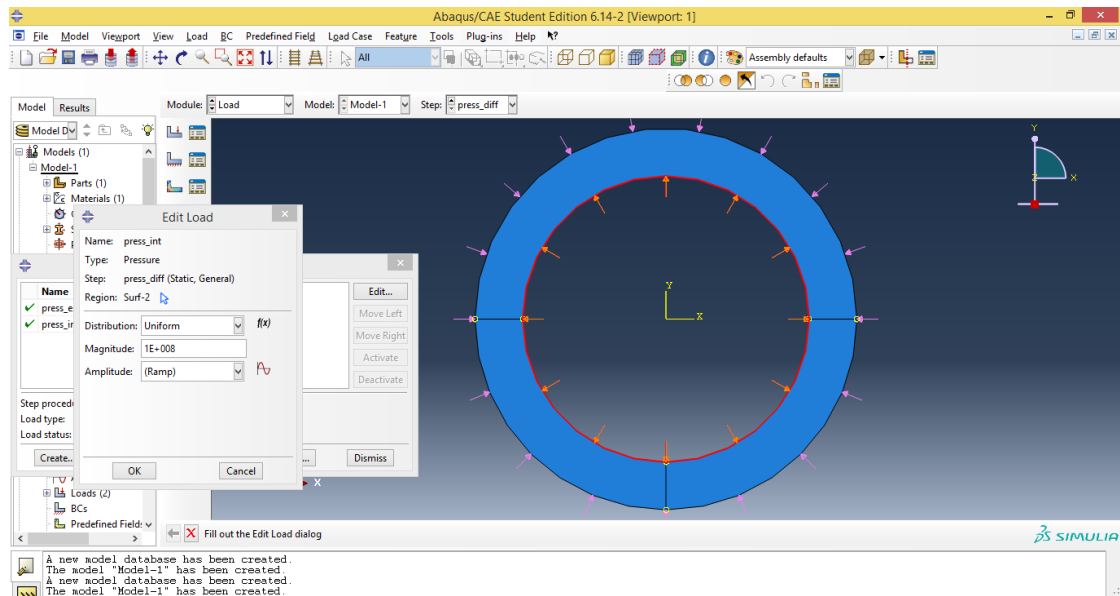


Figure 2.14: Entità del carico

vincolata e quindi invertibile. Una scelta potrebbe essere quella di introdurre vincoli i cui gradi di libertà permettano di accompagnare la deformazione attesa dal tubo: un carrello ad asse verticale nel punto A e C ed un carrello ad asse orizzontale nel punto B. Le condizioni da imporre sono quindi sugli spostamenti: nel punto A e C spostamento verticale nullo, nel punto B spostamento orizzontale nullo (figura 2.15, 2.16). Le direzioni sono identificate dagli assi del sistema di riferimento (spostamento U1 parallelo all'asse  $x$ , spostamento U2 parallelo all'asse  $y$ )

## 2.1.6 MODULO MESH

Nel modulo **mesh** si realizza la discretizzazione geometrica del profilo in Elementi Finiti. Il tipo di Elemento Finito può essere scelto dalla voce Mesh nel menù a tendina:

### *Mesh - Controls*

Dove è possibile scegliere tra Elementi Finiti Quadrangolari o Triangolari, per questa analisi scegliamo gli elementi triangolari che di default sono i CST. Per la definizione del tipo di problema (sforzo piano, deformazione piana, ...) è necessario selezionare la tipologia desiderata in:

### *Mesh - Element Type*

Il problema in esame è riferito ad un tubo di lunghezza illimitata quindi la famiglia di elementi più adatti è il Plane Strain. Tutte le altre operazioni presenti nella finestra restano immutate.

Con il comando *Seed Part Instance* si decide la dimensione media dell'Elemento Finito (figura 2.17). A maggiori dimensioni corrispondono mesh più lasche con conseguente incremento della velocità di calcolo ma perdita di precisione nella soluzione e viceversa. Una volta scelta

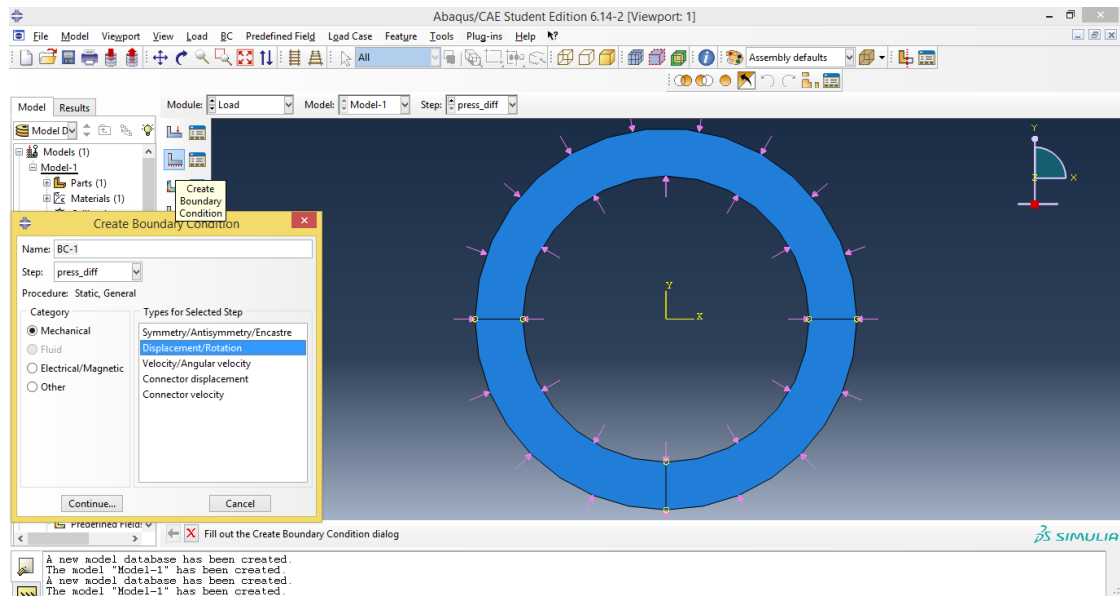


Figure 2.15: Imposizione delle condizioni di vincolo

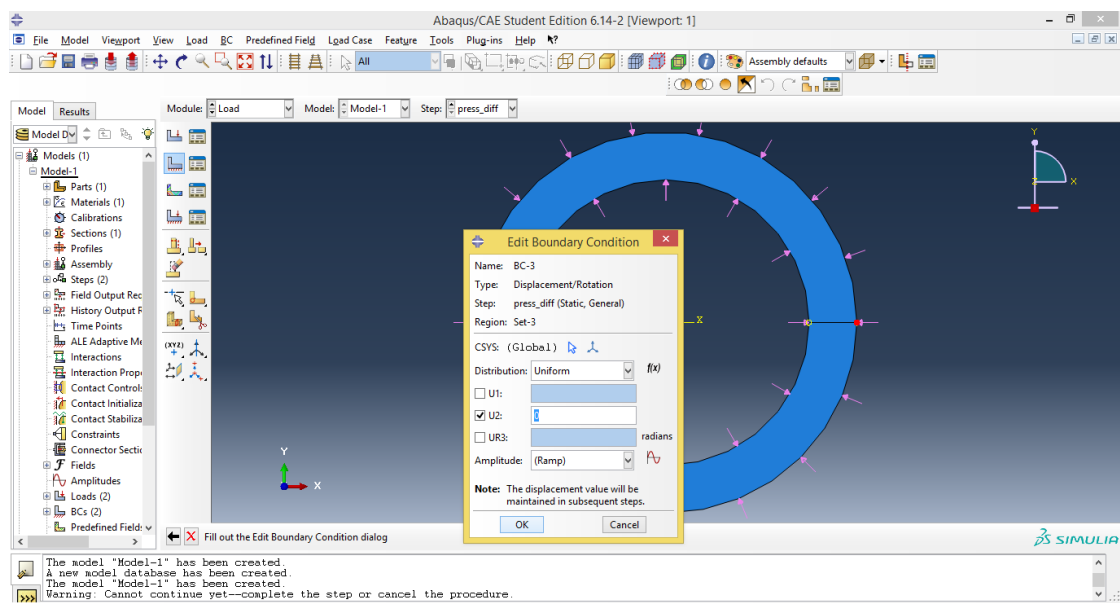


Figure 2.16: Imposizione delle condizioni di vincolo

la dimensione è necessario selezionare le parti (in questo caso tutte) che si vogliono discretizzare. Per realizzare la mesh è sufficiente selezionare il pulsante sottostante (*Seed Part Instance*) e confermare (figura 2.18).

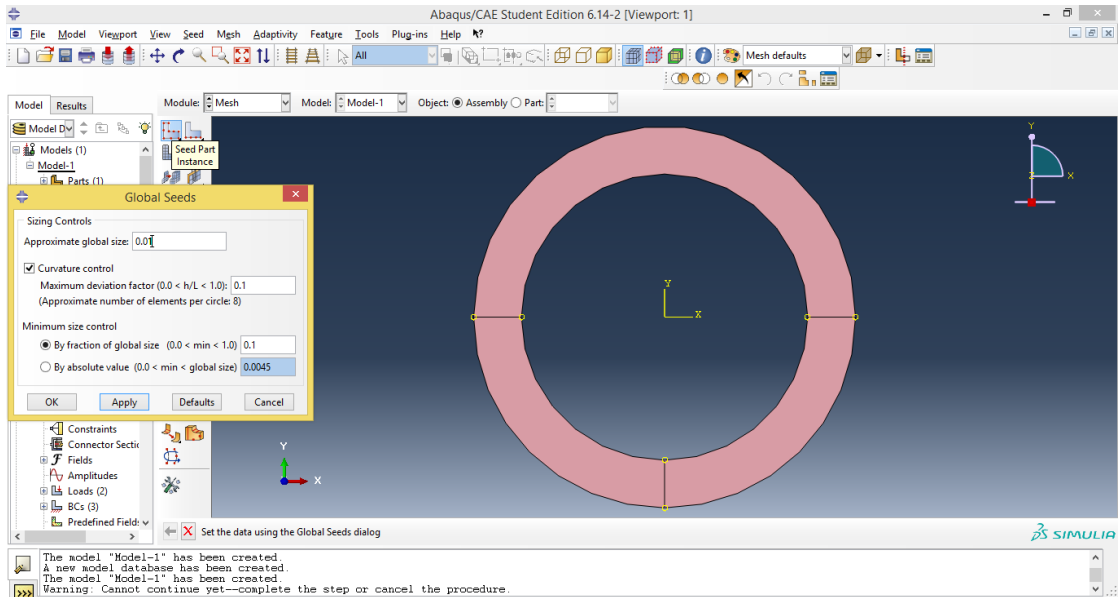


Figure 2.17: Dimensioni dell'Elemento Finito

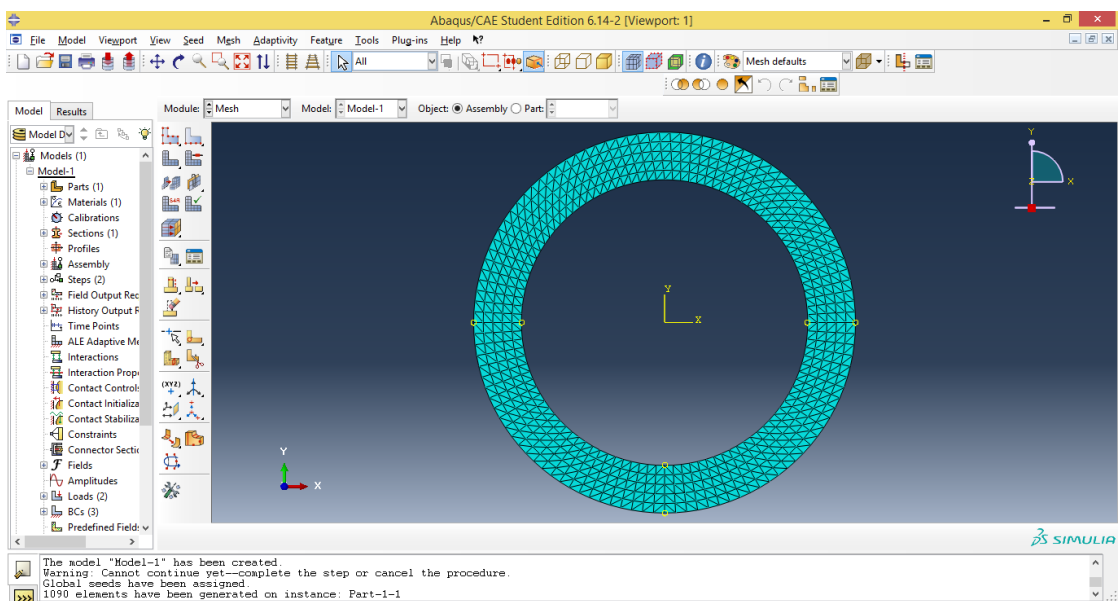


Figure 2.18: Generazione della mesh

### 2.1.7 MODULO JOB

Il modulo **Job** consente di eseguire l'analisi ad Elementi Finiti: lettura della geometria, assemblaggio della matrici delle rigidezze e dei carichi, vincolamento, inversione della matrice, soluzione in termini di spostamenti, ricostruzione (post processamento) delle deformazioni

e degli sforzi. Per creare il lavoro è sufficiente selezionare il comando *Create Job* e confermare tutte le finestre che compaiono. Per lanciare il lavoro è necessario andare sul *Job Manager* e selezionare per il lavoro precedentemente creato il comando *Submit* (2.19). Terminata

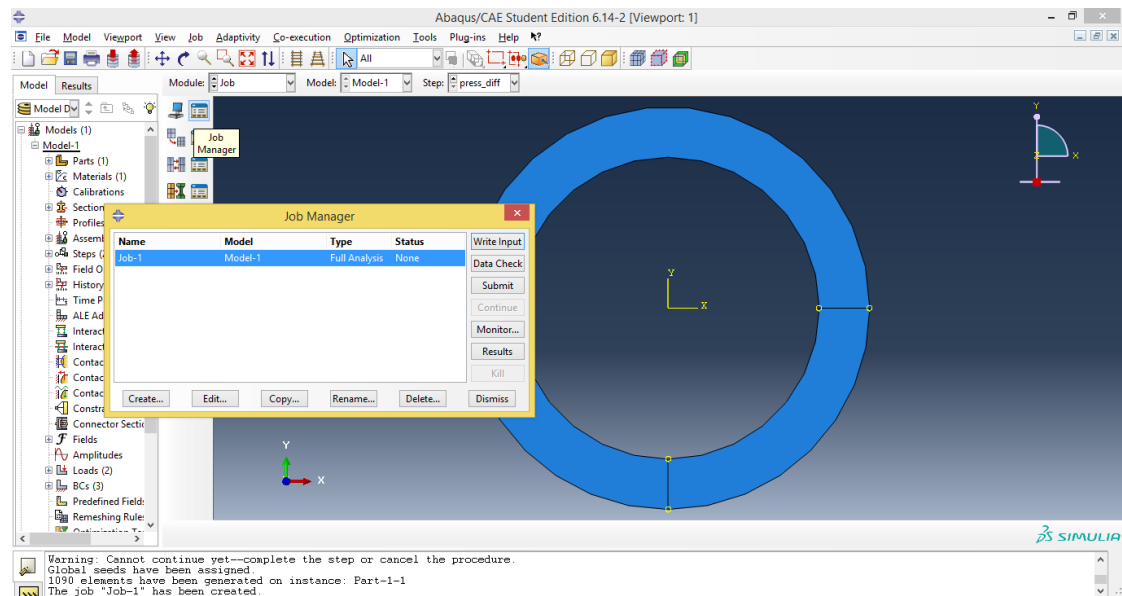


Figure 2.19: Esecuzione del calcolo

l'analisi è possibile selezionare il pulsante *Results* per passare alla finestra di visualizzazione dei risultati.

### 2.1.8 MODULO VISUALIZATION

Le quantità meccaniche di interesse sono essenzialmente gli sforzi presenti nella sezione. Il programma prevede di default un sistema di riferimento cartesiano che male si presta alla rappresentazione degli sforzi per un problema a simmetria cilindrica. Per questo motivo è consigliabile definire un nuovo sistema di riferimento cilindrico centrato nel baricentro della sezione. Per farlo si interviene sul comando *Create Coordinate System* e si seleziona la tipologia cilindrica (figura 2.20). Le finestre che compaiono permettono di orientare il nuovo sistema  $r, \vartheta, z$  rispetto agli assi cartesiani  $x, y, z$ : è sufficiente confermare i campi di default presenti nella barra inferiore. Per impostare come corrente il nuovo sistema di riferimento è sufficiente selezionare dal menù a tendina il nome del sistema appena creato (figura 2.21):

*Result - Options - Transformation - User Specified*

Il modello è ora completo e può essere utilizzato per visionare le mappe di spostamento, deformazione e sforzo nelle diverse direzioni (figura 2.22).



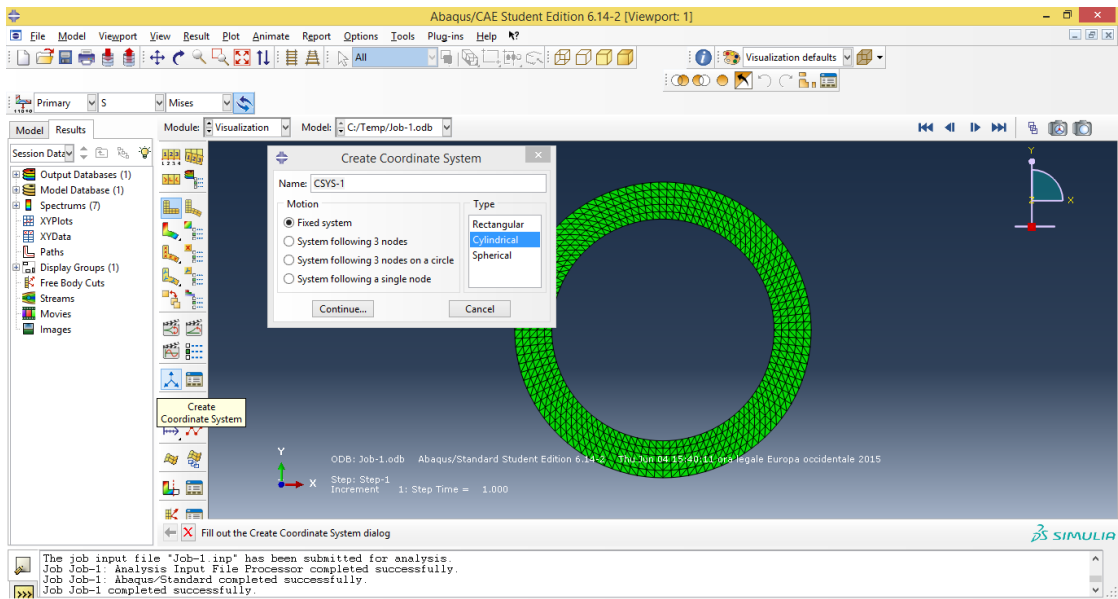


Figure 2.20: Definizione nuovo sistema di riferimento

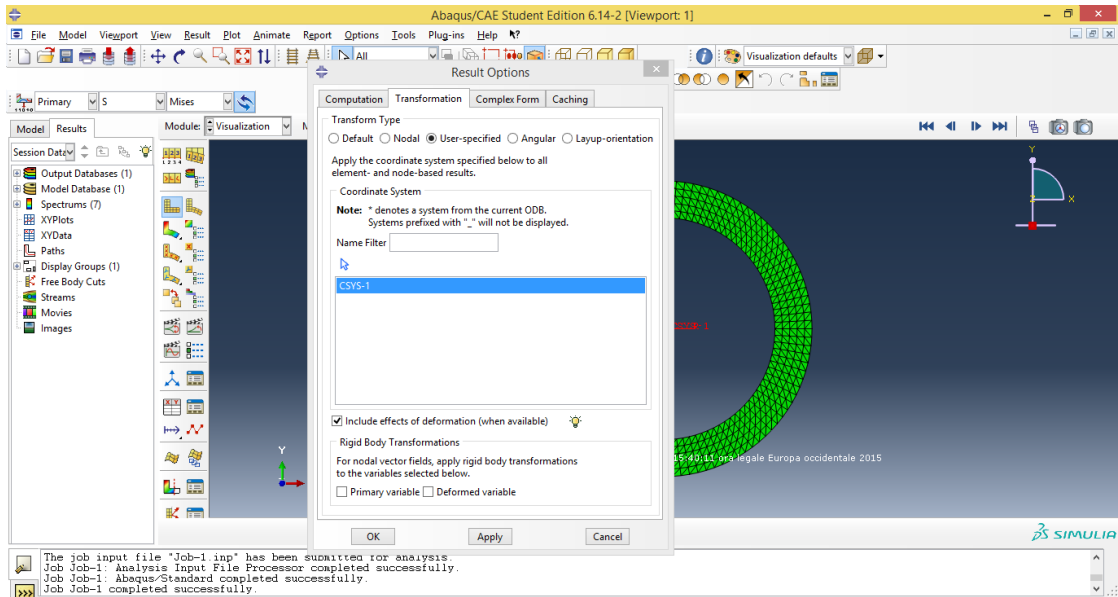


Figure 2.21: Impostazione nuovo sistema di riferimento

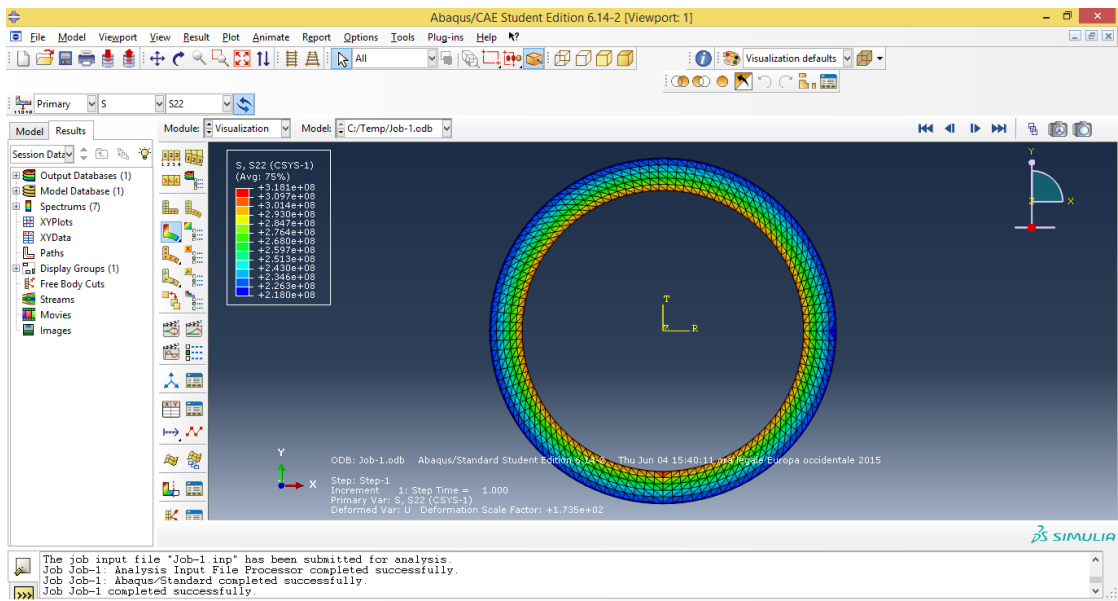


Figure 2.22: Visualizzazione dei risultati