



SFORZI TANGENZIALI DA TAGLIO IN SEZIONI DI TRAVE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



Nicola Cefis

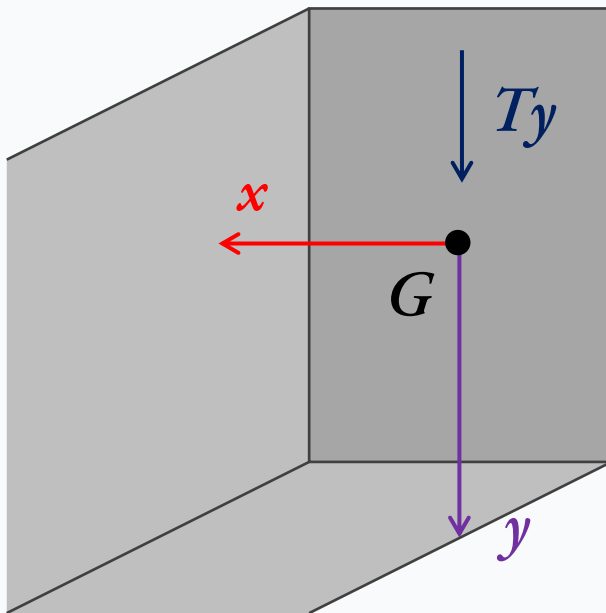
Politecnico di Milano
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: nicola.cefis@polimi.it

URL: www.nicolacefis.com

Da T agli sforzi tangenziali τ in travi

L'azione di taglio T è presente in ogni elemento di trave soggetto ad un momento flettente variabile. Il suo effetto nel materiale si manifesta attraverso la comparsa di sforzi tangenziali.



Contrariamente al caso di tenso/presso flessione per il quale esiste una soluzione analitica *esatta* nel caso del taglio, a causa della maggiore complessità matematica, necessitiamo di soluzioni approssimate. In particolare ci riferiremo alla soluzione equilibrata di Jourawsky.

$$\tau = \frac{T_y \cdot S^*}{b \cdot I_x}$$

T_y : taglio sollecitante;

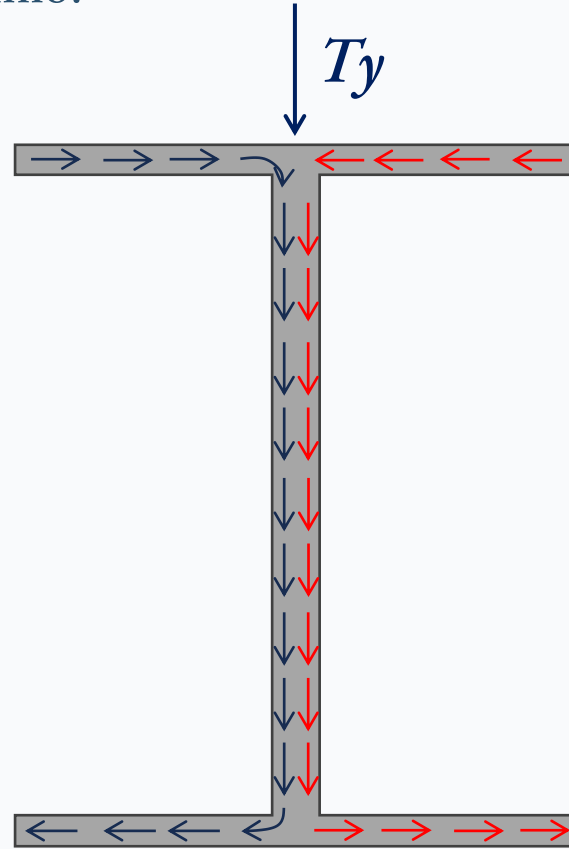
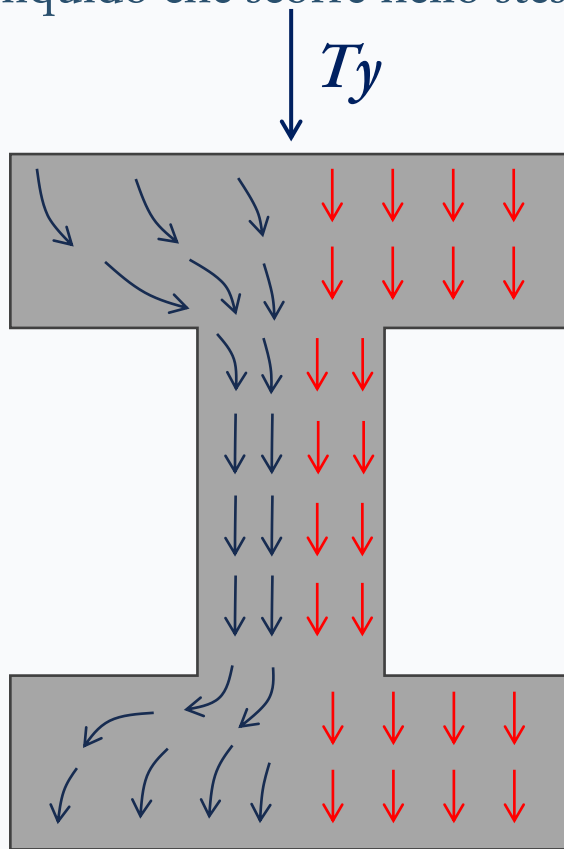
S^* : momento statico locale;

b : corda di taglio;

I_x : momento d'inerzia lungo asse ortogonale al taglio agente;

Da T agli sforzi tangenziali τ in travi

L'andamento dello sforzo tangenziale in un profilo di trave segue un andamento simile a quello che avrebbe un liquido che scorre nello stesso dominio.

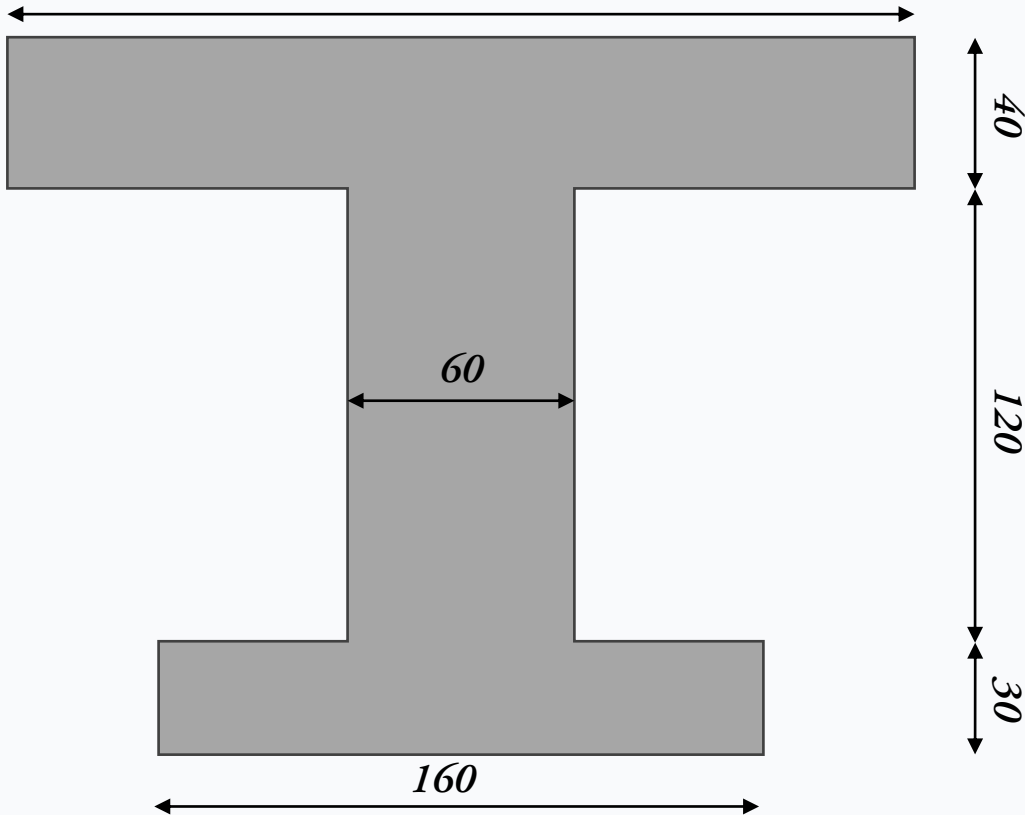


L'andamento reale dello sforzo tangenziale è schematicamente rappresentato dalle frecce blu. Nell'approssimazione che facciamo (tramite formula di Jourawsky) valutiamo le componenti di sforzo prevalenti rappresentate dalle frecce rosse.

Come vedremo negli esempi c'è una differenza di applicazione nei casi di profilo compatto e sottile.

Applicazione su profilo compatto

Tema: consideriamo un generico profilo compatto soggetto ad un taglio $T_y = 50\text{kN}$ lungo l'asse principale verso il basso 240



1. Calcoliamo la proprietà geometriche di sezione;
2. Posizionamento di un sistema di ascisse per ogni figura elementare e dirette come il taglio esterno;
3. Calcolo dei momenti statici parziali S^* in funzione delle ascisse locali;
4. Applicazione della formula di Jourawsky;

$$\tau = \frac{T_y \cdot S^*}{b \cdot I_x}$$

Interpretazione del segno: se negativo concorde alla normale uscente (verso dell'ascissa).

Dimensioni in [mm]

Applicazione su profilo compatto

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:

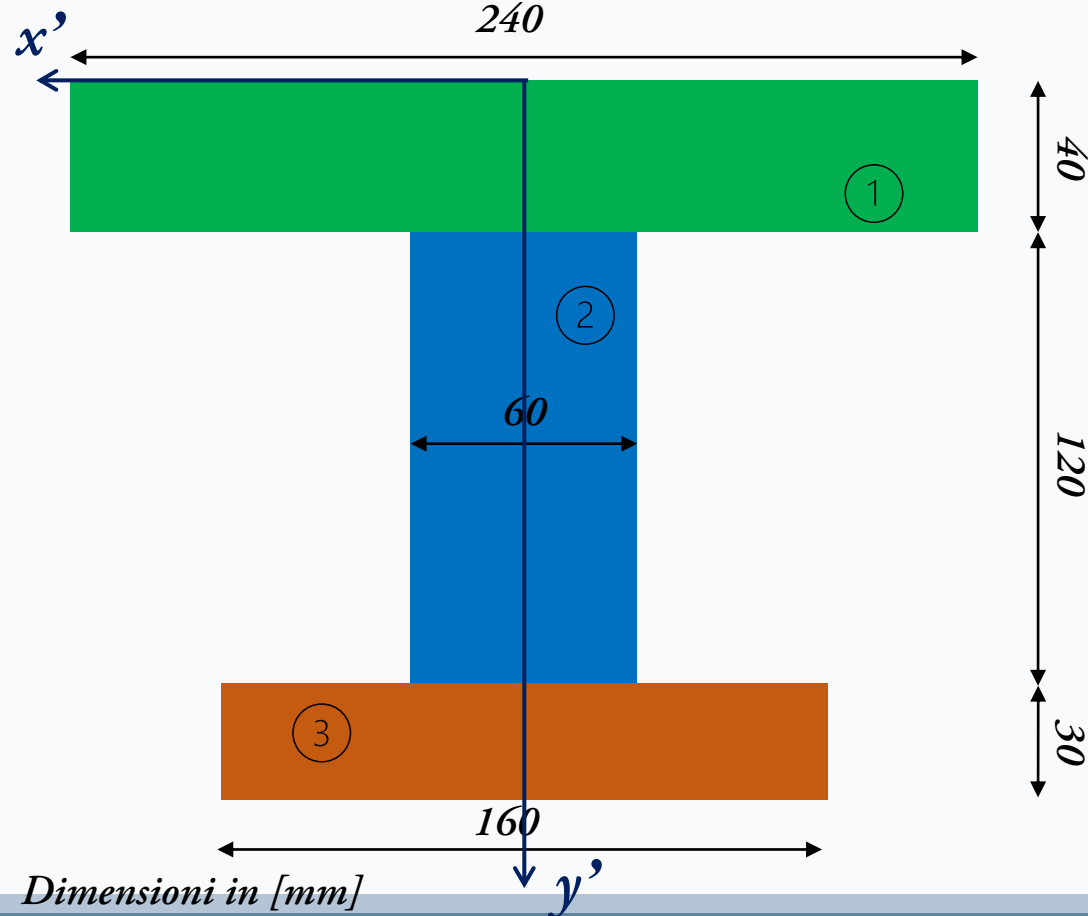


Figura	B _i	H _i	A _i	x' _i	y' _i
1	240	40	9600	0	20
2	60	120	7200	0	100
3	160	30	4800	0	175

Area della sezione

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = 21600 \text{ mm}^2$$

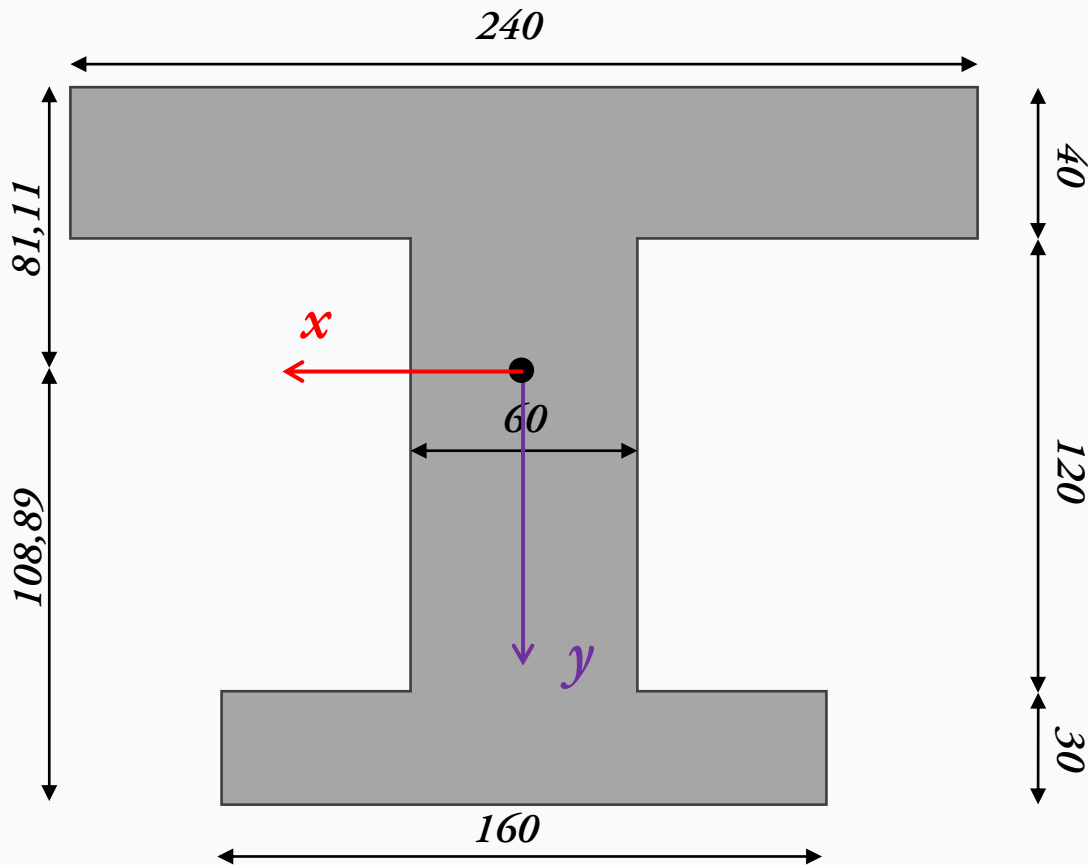
Coordinate baricentro

$$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot y'_i}{A} = 81,11 \text{ mm}$$

$$x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot x'_i}{A} = 0,00 \text{ mm}$$

Applicazione su profilo compatto

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:



$$I_x = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i \cdot H_i^3}{12} + B_i H_i (y'_i - y'_G)^2 = 91013333 \text{ mm}^4$$

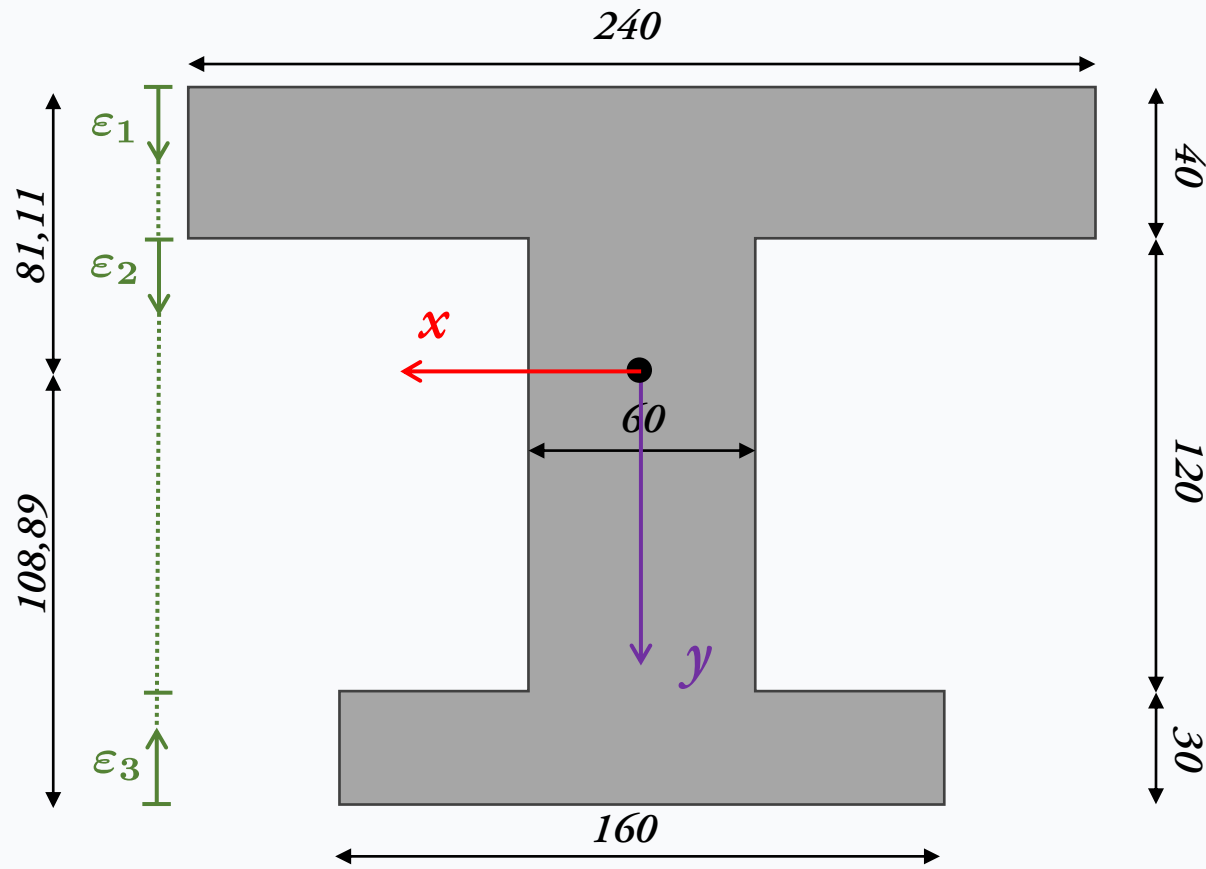
$$I_y = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i^3 \cdot H_i}{12} + B_i H_i (x'_i - x'_G)^2 = 58480000 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^3 B_i H_i (x'_i - x'_G)(y'_i - y'_G) = 0 \text{ mm}^4$$

$I_{xy} = 0 \text{ mm}^4 \gg x-y$ principali d'inerzia

Applicazione su profilo compatto

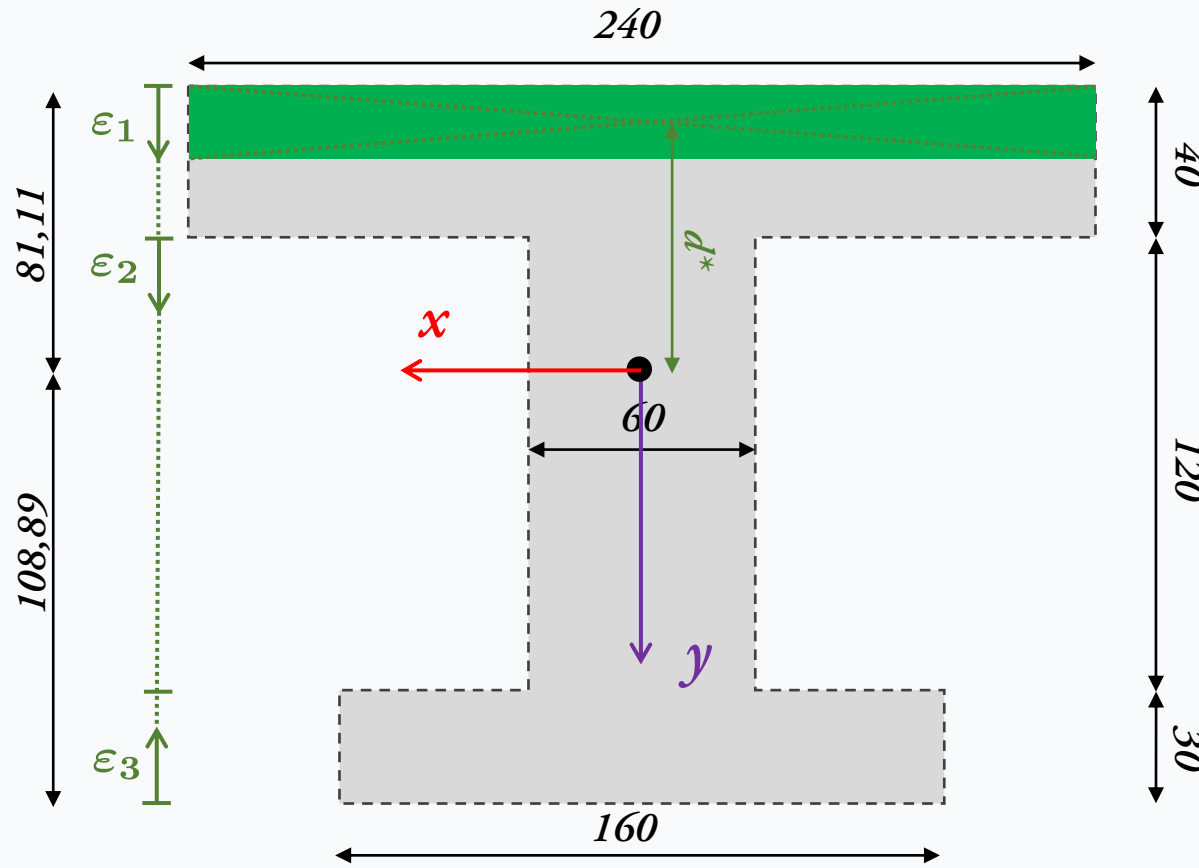
Posizionamento di un sistema di ascisse dirette come il taglio (in questo caso verticale):



In corrispondenza di ogni cambio di spessore (allargamento/restringimento della sezione) devo inserire un nuovo descrittore ϵ_i

Applicazione su profilo compatto

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 1: $b=240\text{mm}$

Calcolo A^* , d^* , S^*

$$A^* = 240\text{mm} \cdot \varepsilon_1$$

$$d^* = -81,11\text{mm} + \varepsilon_1/2$$

$$S^* = (240\text{mm} \cdot \varepsilon_1)(-81,11\text{mm} + \varepsilon_1/2)$$

Calcolo valori estremi di S^* e τ

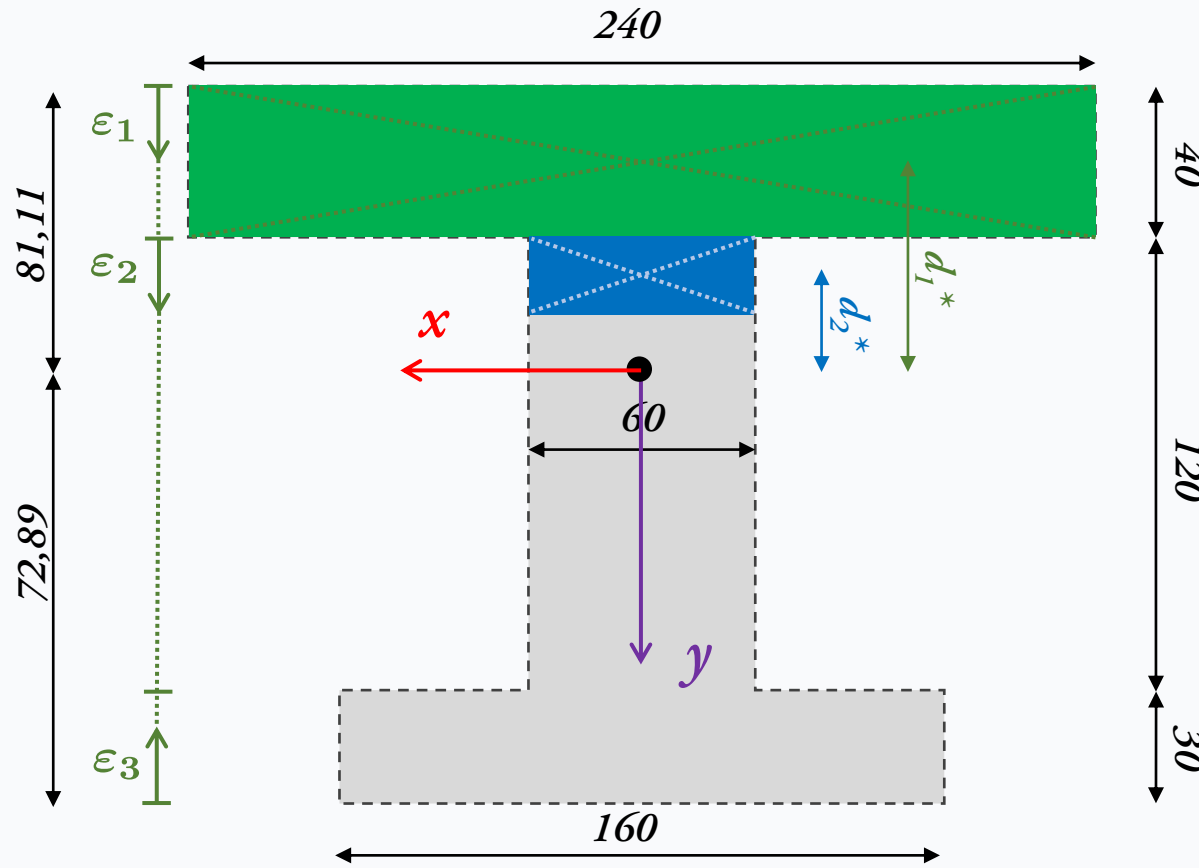
$$\begin{cases} S^*(\varepsilon_1 = 0\text{mm}) = 0\text{mm}^3 \\ S^*(\varepsilon_1 = 40\text{mm}) = -586656\text{mm}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon_1 = 0\text{mm}) = 0\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_1 = 40\text{mm}) = -1,34\text{MPa} \end{cases}$$

Negativo: concorde alla normale uscente (verso dell'ascissa).

Applicazione su profilo compatto

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 2: $b=60\text{mm}$

Nota: il tratto 2 porta dietro il tratto 1

Calcolo A_1^* , d_1^* , S_1^*

$$A_1^* = 240\text{mm} \cdot 40\text{mm}$$

$$d_1^* = -61,11\text{mm}$$

$$S_1^* = (240\text{mm} \cdot 40\text{mm})(-61,11\text{mm})$$

Calcolo A_2^* , d_2^* , S_2^*

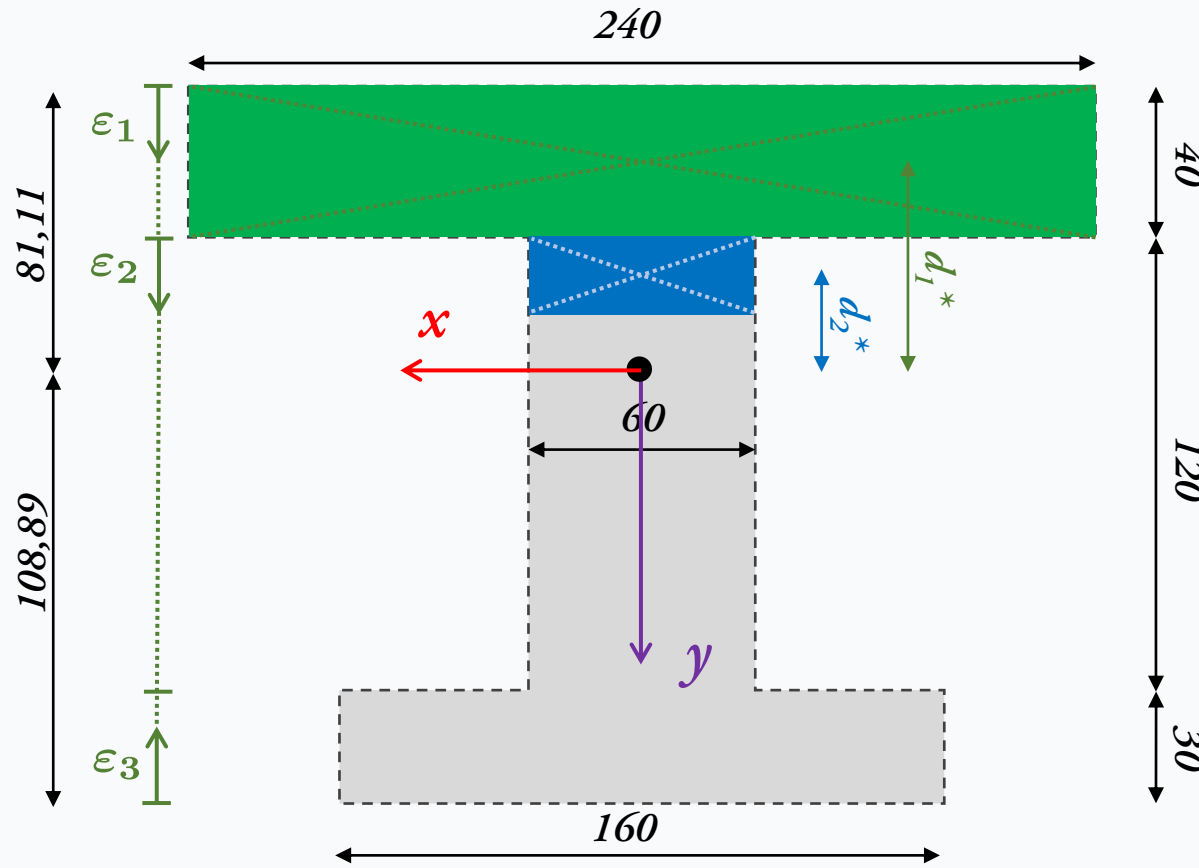
$$A_2^* = 60\text{mm} \cdot \varepsilon_2$$

$$d_2^* = -61,11\text{mm} + \varepsilon_2/2$$

$$S_2^* = (60\text{mm} \cdot \varepsilon_2)(-61,11\text{mm} + \varepsilon_2/2)$$

Applicazione su profilo compatto

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 2: $b=60\text{mm}$

Calcolo $S^* = S_1^* + S_2^*$

$$S^* = (240\text{mm} \cdot 40\text{mm})(-61,11\text{mm}) + (60\text{mm} \cdot \varepsilon_2)(-61,11\text{mm} + \varepsilon_2/2)$$

Calcolo valori estremi e baricentrici di S^* e τ

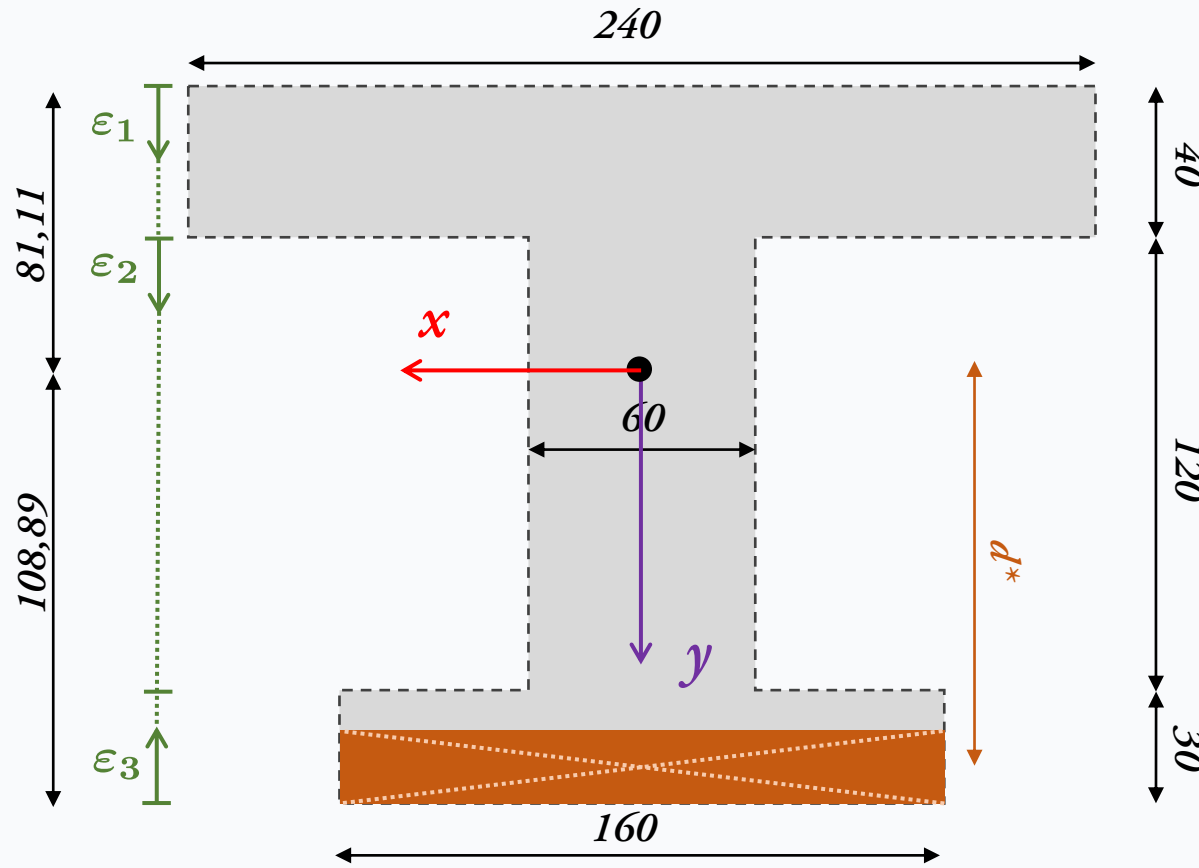
$$\begin{cases} S^*(\varepsilon_2 = 0\text{mm}) = -586656\text{mm}^3 \\ S^*(\varepsilon_2 = 41,11\text{mm}) = -637357\text{mm}^3 \\ S^*(\varepsilon_2 = 41,11\text{mm}) = -450648\text{mm}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon_2 = 0\text{mm}) = -5,37\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_2 = 41,44\text{mm}) = -5,48\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_2 = 120\text{mm}) = -4,13\text{MPa} \end{cases}$$

Negativo: concorde alla normale uscente (verso dell'ascissa).

Applicazione su profilo compatto

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 3: $b=160\text{mm}$

Calcolo A^* , d^* , S^*

$$A^* = 160\text{mm} \cdot \varepsilon_3$$

$$d^* = 108,89\text{mm} - \varepsilon_3/2$$

$$S^* = (160\text{mm} \cdot \varepsilon_3)(108,89\text{mm} - \varepsilon_3/2)$$

Calcolo valori estremi di S^* e τ

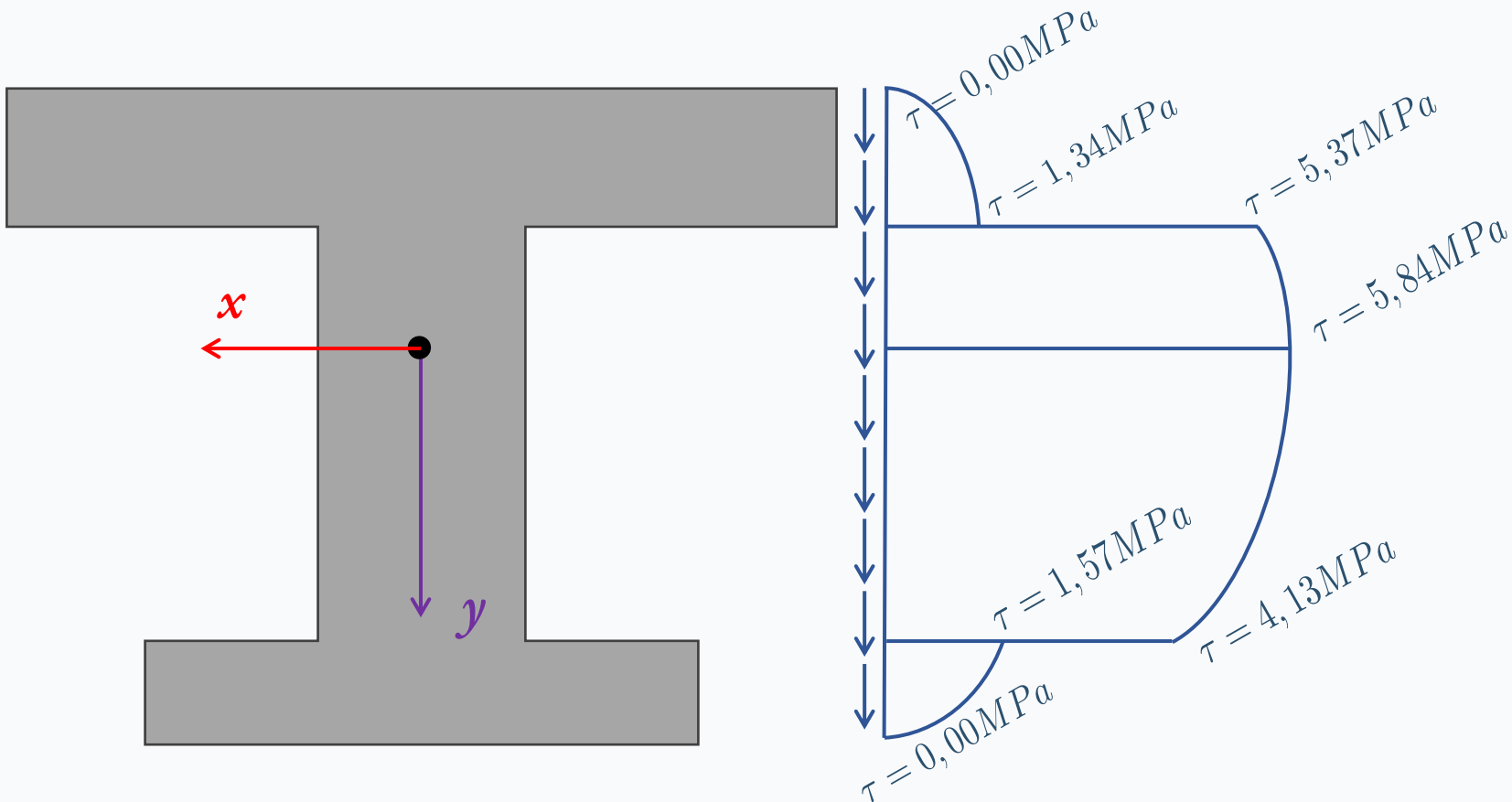
$$\begin{cases} S^*(\varepsilon_3 = 0\text{mm}) = 0\text{mm}^3 \\ S^*(\varepsilon_3 = 30\text{mm}) = 450672\text{mm}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon_3 = 0\text{mm}) = 0\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_3 = 30\text{mm}) = 1,57\text{MPa} \end{cases}$$

Positivo: discorde alla normale uscente (verso opposto all'ascissa).

Applicazione su profilo compatto

Tracciamento del diagramma di sforzo tangenziale (componente verticale)



Si conservano in flussi alle interfacce?

- interfaccia 1-2

$$q_1^{1\langle \rangle 2} = 1,34 \text{ MPa} \cdot 240 \text{ mm} = 322 \text{ N/mm}$$

$$q_2^{1\langle \rangle 2} = 5,37 \text{ MPa} \cdot 60 \text{ mm} = 322 \text{ N/mm}$$

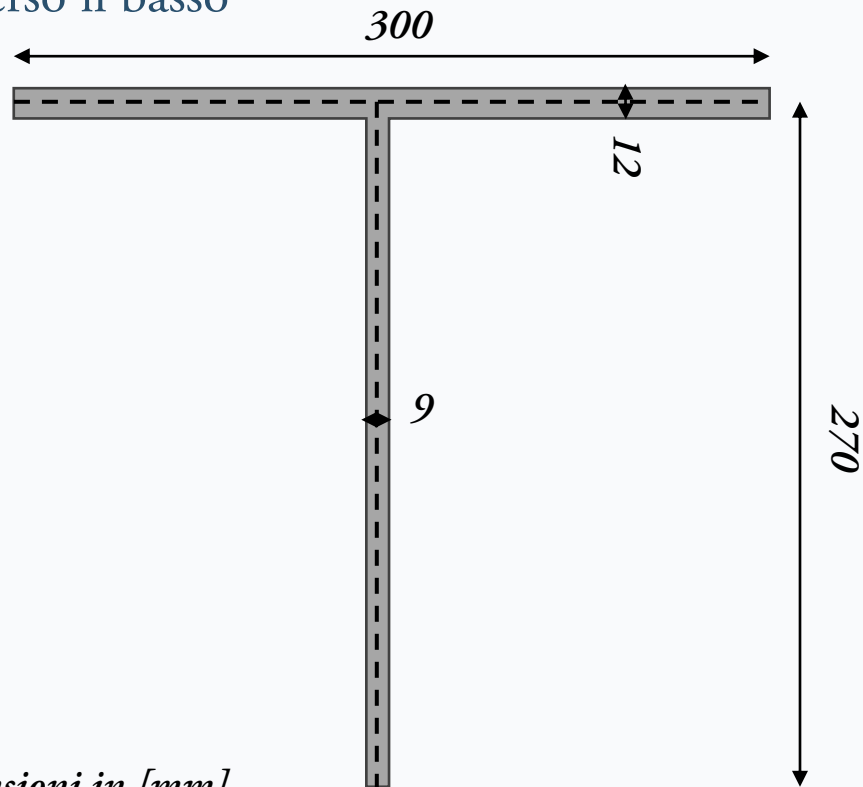
- interfaccia 2-3

$$q_2^{2\langle \rangle 3} = 4,13 \text{ MPa} \cdot 60 \text{ mm} = 249 \text{ N/mm}$$

$$q_3^{2\langle \rangle 3} = 1,57 \text{ MPa} \cdot 160 \text{ mm} = 251 \text{ N/mm}$$

Applicazione su profilo sottile

Tema: consideriamo un generico profilo sottile soggetto ad un taglio $T_y = 50\text{kN}$ lungo l'asse principale verso il basso



Dimensioni in [mm]

Quote relative alle linee medie

1. Calcoliamo la proprietà geometriche di sezione;
2. Posizionamento di un sistema di ascisse per ogni figura elementare e dirette come le linee medie;
3. Calcolo dei momenti statici parziali S^* in funzione delle ascisse locali;
4. Applicazione della formula di Jourawsky;

$$\tau = \frac{T_y \cdot S^*}{b \cdot I_x}$$

Interpretazione del segno: se negativo concorde alla normale uscente (verso dell'ascissa).

Applicazione su profilo sottile

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:

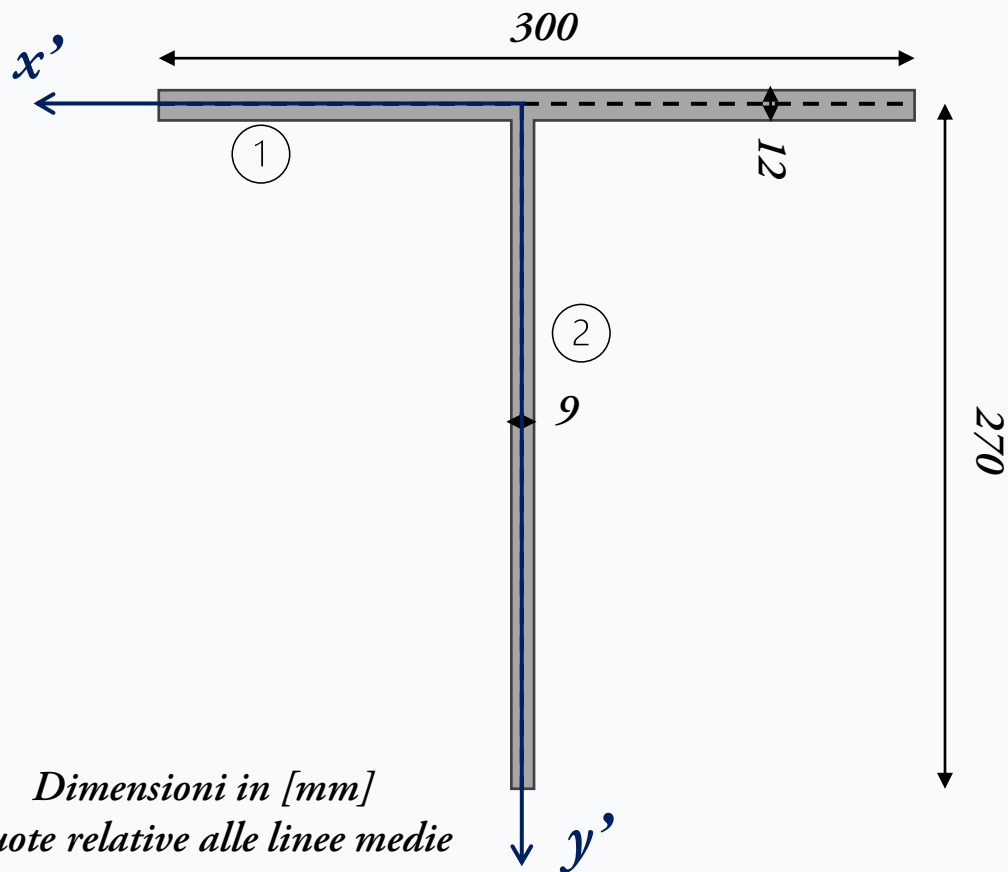


Figura	B_i	H_i	A_i	x'_i	y'_i
1	300	12	3600	0	0
2	9	270	2430	0	135

Area della sezione

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = 6030 \text{ mm}^2$$

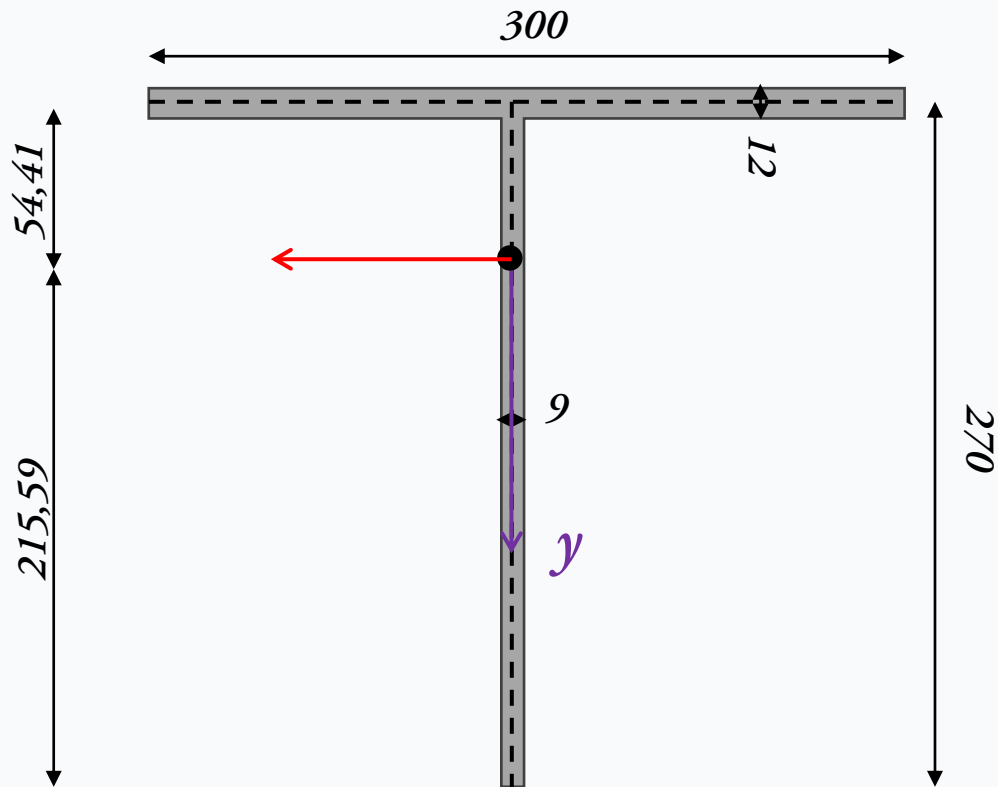
Coordinate baricentro

$$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot y'_i}{A} = 54,41 \text{ mm}$$

$$x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot x'_i}{A} = 0,00 \text{ mm}$$

Applicazione su profilo sottile

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:



$$I_x = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i \cdot H_i^3}{12} + B_i H_i (y'_i - y'_G)^2 = 41245301 \text{ mm}^4$$

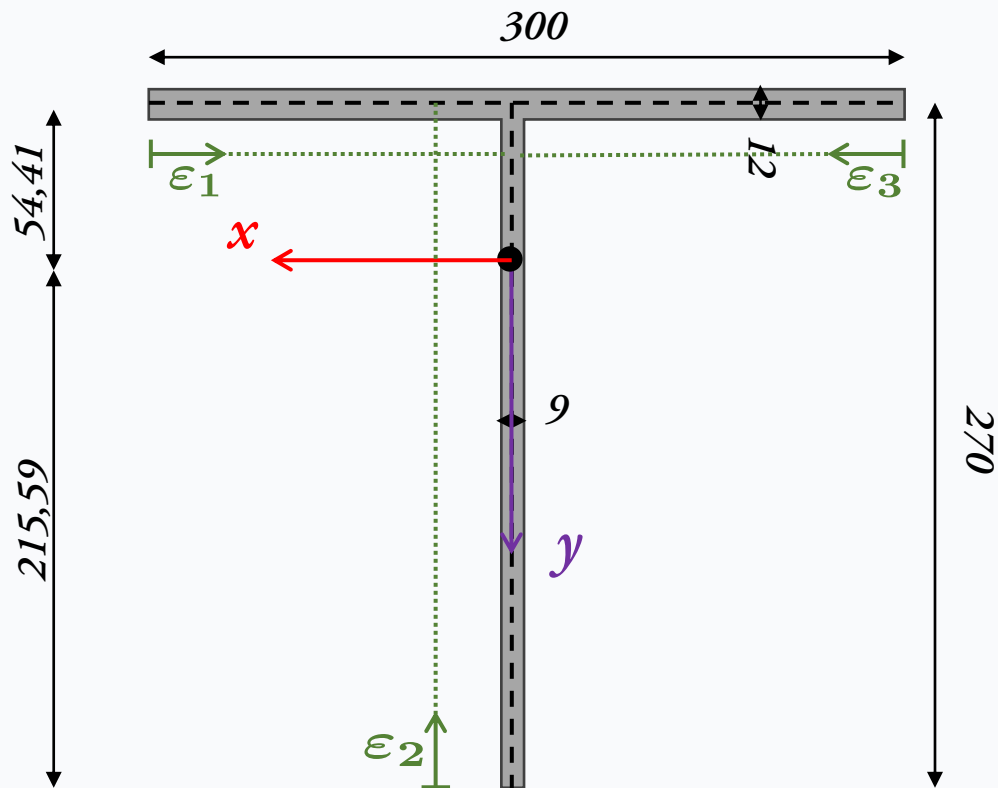
$$I_y = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i^3 \cdot H_i}{12} + B_i H_i (x'_i - x'_G)^2 = 27016403 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^3 B_i H_i (x'_i - x'_G)(y'_i - y'_G) = 0 \text{ mm}^4$$

$I_{xy} = 0 \text{ mm}^4 \gg x-y$ principali d'inerzia

Applicazione su profilo sottile

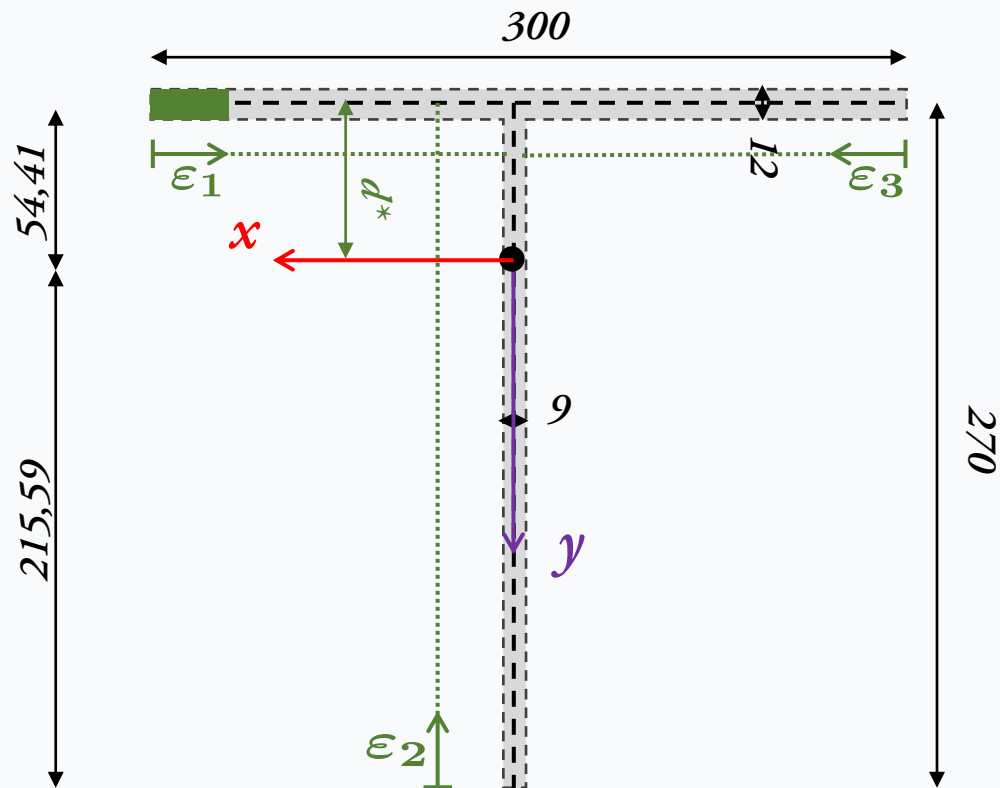
Posizionamento di un sistema di ascisse dirette come le linee medie:



Contrariamente al caso di profilo compatto nei profili sottili le ascisse sono sempre allineate come la linea media (indipendentemente dalla direzione del taglio agente). Questo perché nei profili sottili i vettori di sforzo tangenziale sono allineati prevalentemente lungo la linea media.

Applicazione su profilo sottile

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 1: $b=12\text{mm}$

Calcolo A^* , d^* , S^*

$$A^* = 12\text{mm} \cdot \varepsilon_1$$

$$d^* = -54,41\text{mm}$$

$$S^* = (12\text{mm} \cdot \varepsilon_1)(-54,41\text{mm})$$

Calcolo valori estremi di S^* e τ

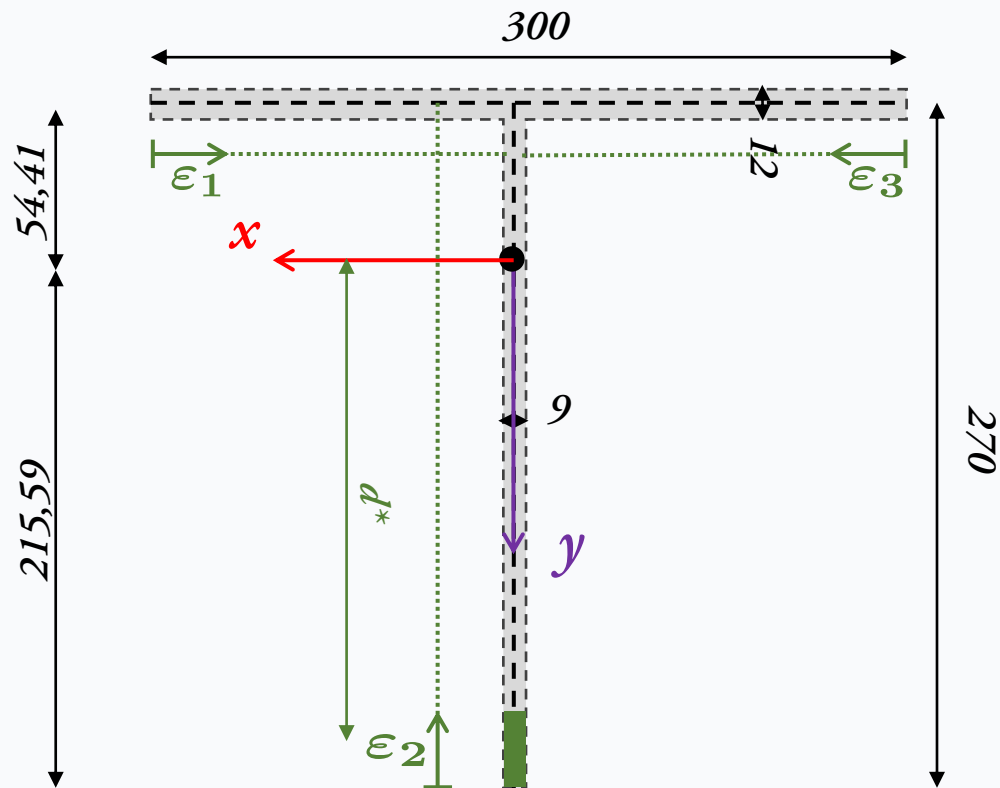
$$\begin{cases} S^*(\varepsilon_1 = 0\text{mm}) = 0\text{mm}^3 \\ S^*(\varepsilon_1 = 150\text{mm}) = -97938\text{mm}^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon_1 = 0\text{mm}) = 0\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_1 = 150\text{mm}) = -9,89\text{MPa} \end{cases}$$

Negativo: concorde alla normale uscente (verso dell'ascissa).

Applicazione su profilo sottile

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 2: $b=9\text{mm}$

Calcolo A^* , d^* , S^*

$$A^* = 9\text{mm} \cdot \epsilon_2$$

$$d^* = 215,59\text{mm} - \epsilon_2/2$$

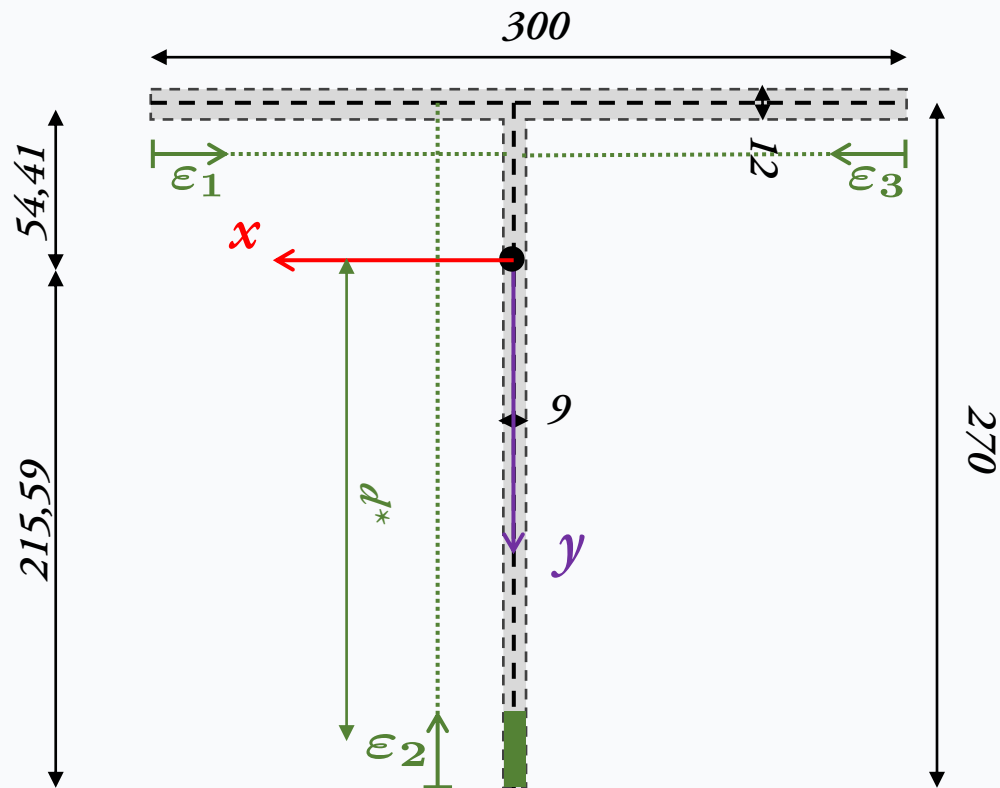
$$S^* = (9\text{mm} \cdot \epsilon_2)(215,59\text{mm} - \epsilon_2/2)$$

Calcolo valori estremi di S^* e τ

$$\begin{cases} S^*(\epsilon_2 = 0\text{mm}) = 0\text{mm}^3 \\ S^*(\epsilon_2 = 215,59\text{mm}) = 209155,7\text{mm}^3 \\ S^*(\epsilon_2 = 270\text{mm}) = 195833,7\text{mm}^3 \end{cases}$$

Applicazione su profilo sottile

Seziona in corrispondenza di ogni ascissa e calcolo momento statico S^* e componente verticale di τ



Tratto 2: $b=9\text{mm}$

$$\begin{cases} \tau(\varepsilon_2 = 0\text{mm}) = 0\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_2 = 215,59\text{mm}) = 28,17\text{MPa} \\ \tau(\varepsilon_2 = 270\text{mm}) = 26,38\text{MPa} \end{cases}$$

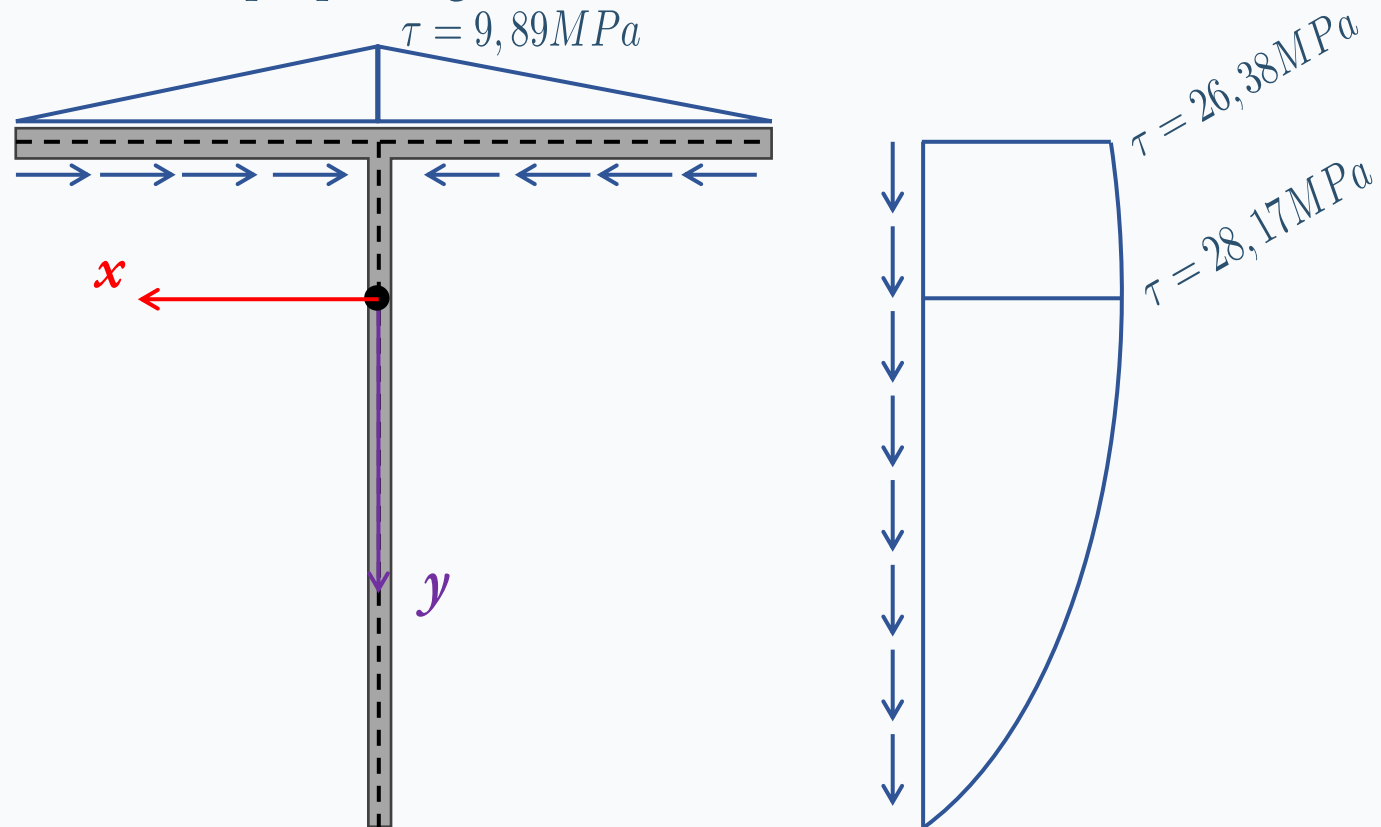
Positivo: discorde alla normale uscente (verso opposto all'ascissa).

Tratto 3: $b=12\text{mm}$

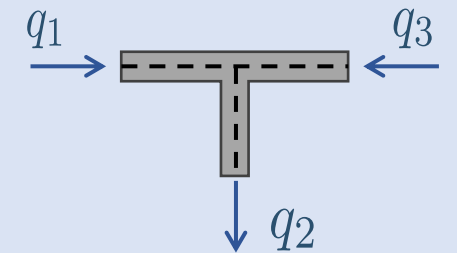
Per simmetria identico al tratto 1

Applicazione su profilo sottile

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:



Si conservano in flussi ai nodi?



$$q_1 = 9,89 \text{ MPa} \cdot 12 \text{ mm} = 118,7 \text{ N/mm}$$

$$q_3 = 9,89 \text{ MPa} \cdot 12 \text{ mm} = 118,7 \text{ N/mm}$$

$$q_2 = 26,38 \text{ MPa} \cdot 9 \text{ mm} = 237,4 \text{ N/mm}$$

$$q_1 + q_3 = q_2$$



SFORZI TANGENZIALI DA TAGLIO IN SEZIONI DI TRAVE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



Nicola Cefis

Politecnico di Milano
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: nicola.cefis@polimi.it

URL: www.nicolacefis.com

*Grazie per
l'attenzione!*