

SFORZI NORMALI IN SEZIONI DI TRAVE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



Nicola Cefis

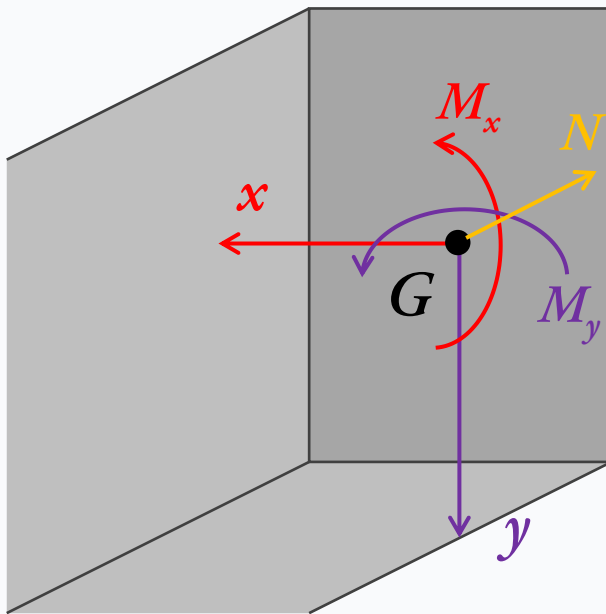
Politecnico di Milano
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: nicola.cefis@polimi.it

URL: www.nicolacefis.com

Da N-M agli sforzi normali σ in travi

Si parla di tenso/presso flessione quando una sezione di trave è soggetta alla presenza contestuale di azione assiale e momento flettente. Se è presente momento flettente attorno un solo asse principale si parla di tenso/presso flessione retta, se sono presenti entrambe i momenti flettenti si parla di tenso/presso flessione deviata



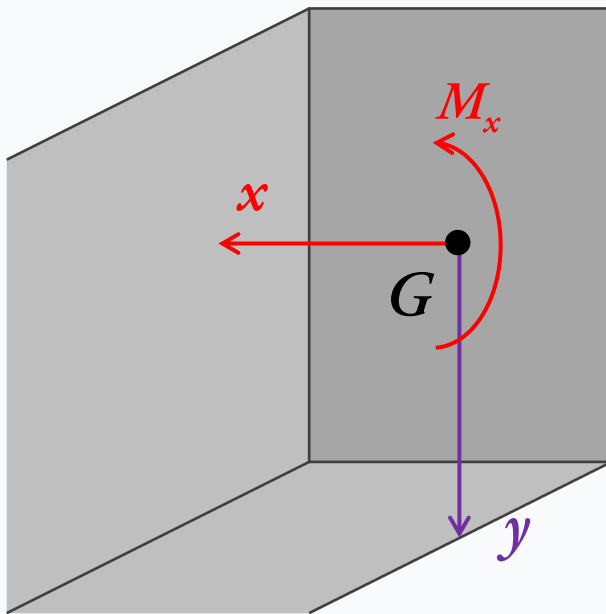
- Azione assiale è considerata positiva se di trazione (tenso-flessione) negativa se di compressione (presso-flessione).
- Momenti flettenti positivi se concordi con gli assi di riferimento (applicazione della *regola della mano destra* e riporto del vettore equivalente sul piano).

Azione assiale e momenti flettenti generano nel materiale sforzi normali σ

Da N-M agli sforzi normali σ in travi

Come faccio ad applicare la regola della mano destra per capire la concordanza/discordanza dei momenti rispetto agli assi principali?

Consideriamo il momento attorno all'asse x :

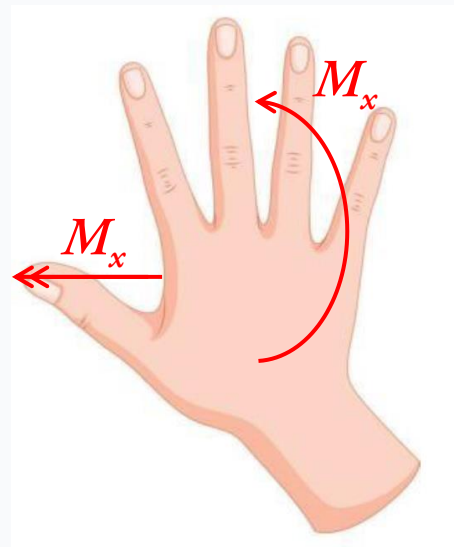
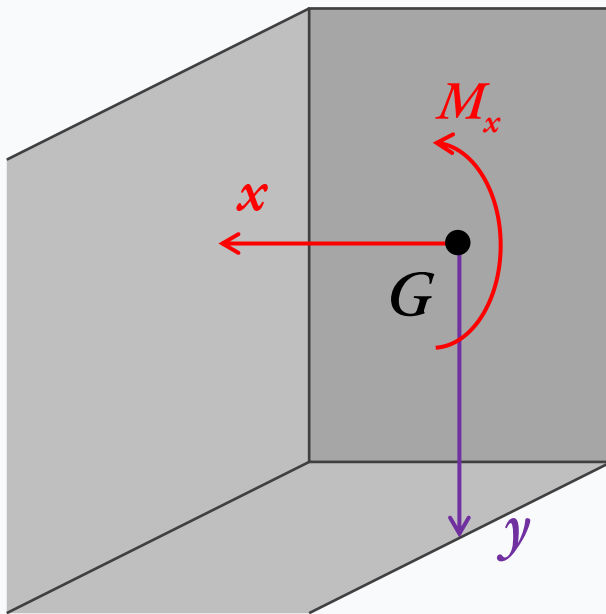


Una volta definita dall'osservazione del diagramma dei momenti flettenti la zona tesa e la zona compressa disegno il vettore curvo del momento. In questo caso di esempio il momento disegnato è associato a fibre tese inferiori (coda del vettore) e fibre compresse superiori (punta del vettore).

Da N-M agli sforzi normali σ in travi

Come faccio ad applicare la regola della mano destra per capire la concordanza/discordanza dei momenti rispetto agli assi principali?

Consideriamo il momento attorno all'asse x :



A questo punto prendiamo la nostra mano destra e appoggiamo la punta delle dita in corrispondenza della freccia ed il palmo della mano in corrispondenza della coda.

La rappresentazione piana del momento (indicata con un vettore a doppia freccia) è diretta come il pollice.

In questo caso il momento flettente M_x risulta positivo perché concorde con l'asse x

Procedura operativa per il calcolo degli sforzi σ

Formula trinomia:

Consideriamo una trave sotto costituita da materiale elastico-lineare e simmetrico in trazione e compressione e sotto l'ipotesi di mantenimento delle sezioni piane. Il calcolo degli sforzi normali può essere condotto attraverso la *formula trinomia*.

$$\sigma_z(x, y) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

La formula consente di calcolare lo stato di sforzo in ogni punto x-y della sezione. Come analisti strutturali siamo però interessati a trovare preliminarmente i punti nei quali lo sforzo è massimo e minimo.

Nella slide successiva analizzeremo la procedura operativa per poter identificare questi punti e per utilizzare questa formula al fine di calcolare gli sforzi.

Nota: per semplicità considero il caso di assi x-y principali d'inerzia. Se così non fosse i pedici delle quantità sarebbero u-v.

Procedura operativa per il calcolo degli sforzi σ

Determinazione delle due coppie di coordinate x - y associate ai punti critici e calcolo degli sforzi:

a) Calcolo l'asse neutro ovvero il luogo geometrico nella sezione caratterizzato da sforzo nullo:

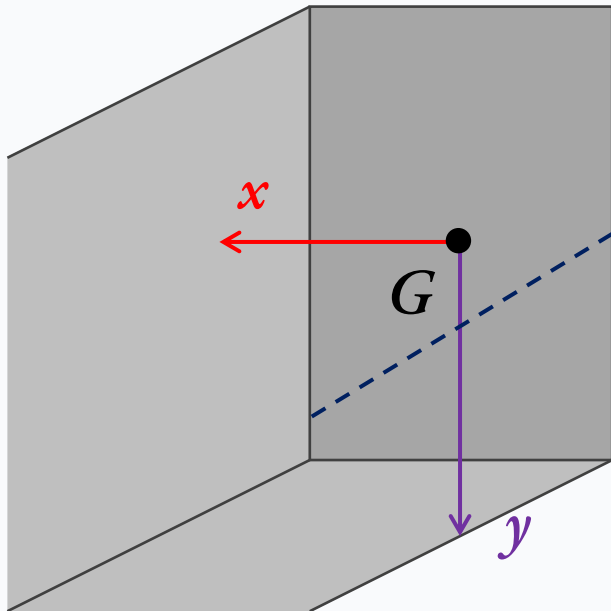
$$\sigma_z(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_x}{M_x} \cdot x \quad \boxed{\text{Equazione dell'asse neutro}}$$

b) Traccio la retta corrispondente all'asse neutro sul piano $x - y$;

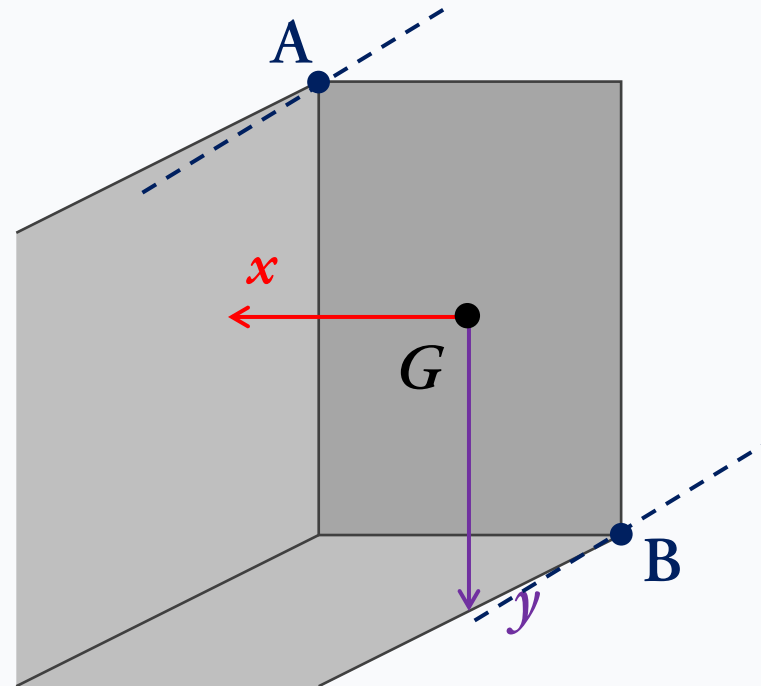
c) Identifico i punti della sezione a maggior distanza dalla retta dell'asse neutro.

d) Questi due punti (A, B) sono quelli a massimo e minimo sforzo: estraggo dal disegno le loro coordinate e le sostituiscono nella formula trinomia per calcolare gli sforzi presenti in essi.

Procedura operativa per il calcolo degli sforzi σ



Disegno retta dell'asse neutro nella sezione



Traslazione ai punti estremi della sezione

Ottenuti graficamente i punti critici A e B si procede con il calcolo dello stato di sforzo attraverso la formula trinomia.

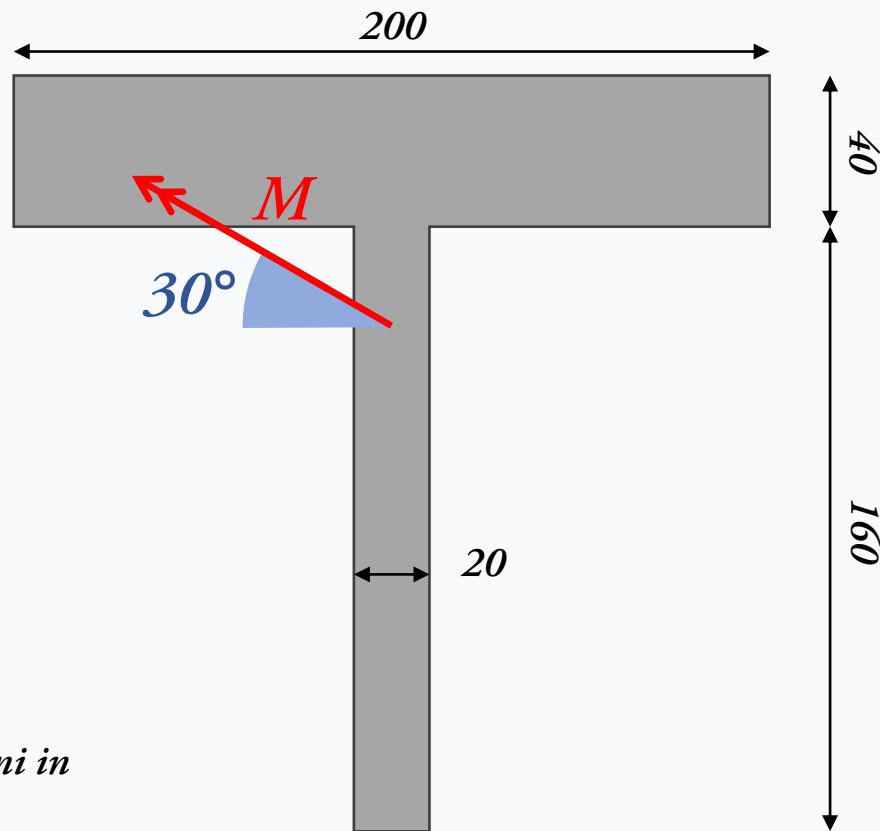
$$\sigma_z^A(x_A, y_A) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A - \frac{M_y}{I_y} \cdot x_A$$

$$\sigma_z^B(x_B, y_B) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B - \frac{M_y}{I_y} \cdot x_B$$

Qualsiasi valore di sforzo nella sezione sarà compreso tra questi due valori estremi.

Esempio di applicazione

Tema: La sezione di figura è soggetta al momento flettente $M=15\text{kNm}$ indicato e ad un'azione assiale di compressione di intensità 160kN . Calcolare sforzi normali massimi e minimi nella sezione.

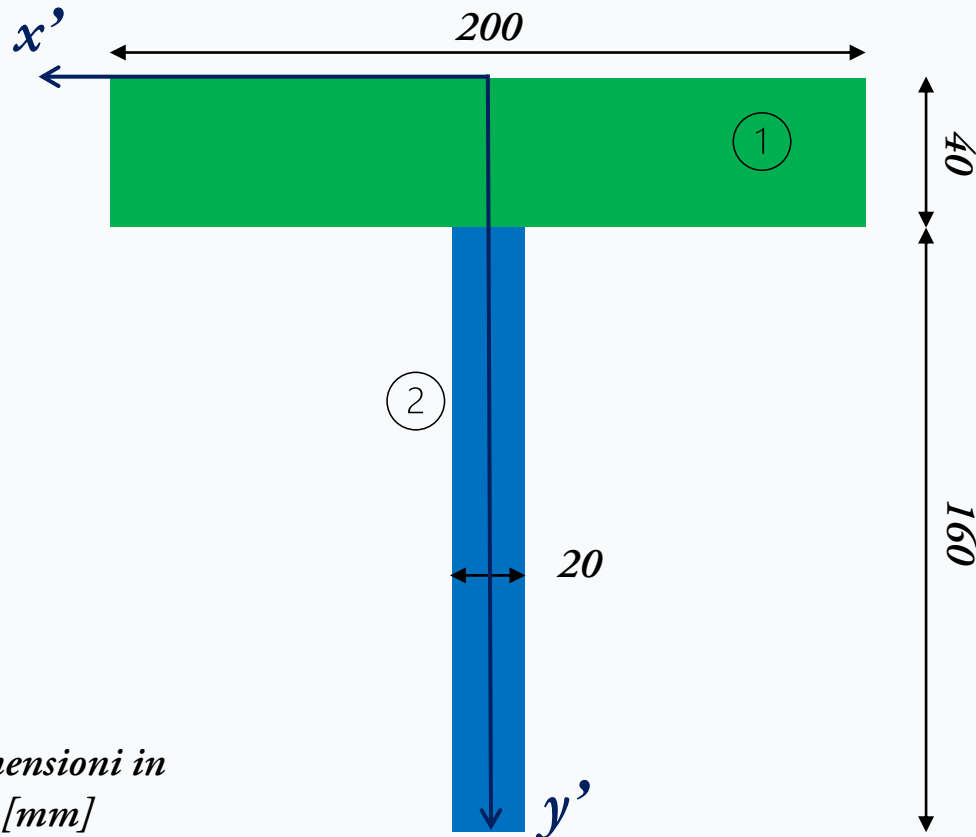


*Dimensioni in
[mm]*

1. Calcoliamo la proprietà geometriche di sezione;
2. Riportiamo le componenti dei momenti attorno agli assi principali d'inerzia;
3. Calcoliamo l'equazione dell'asse neutro e tracciamo la stessa sulla sezione;
4. Determiniamo i punti critici di sforzo;
5. Calcoliamo lo sforzo normale in questi due punti con la formula trinomia.

Esempio di applicazione

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:



Dimensioni in
[mm]

Figura	B _i	H _i	A _i	x' _i	y' _i
1	200	40		0	20
2	20	160		0	120

Area della sezione

$$A = \sum_{i=1}^2 A_i = 11200 \text{ mm}^2$$

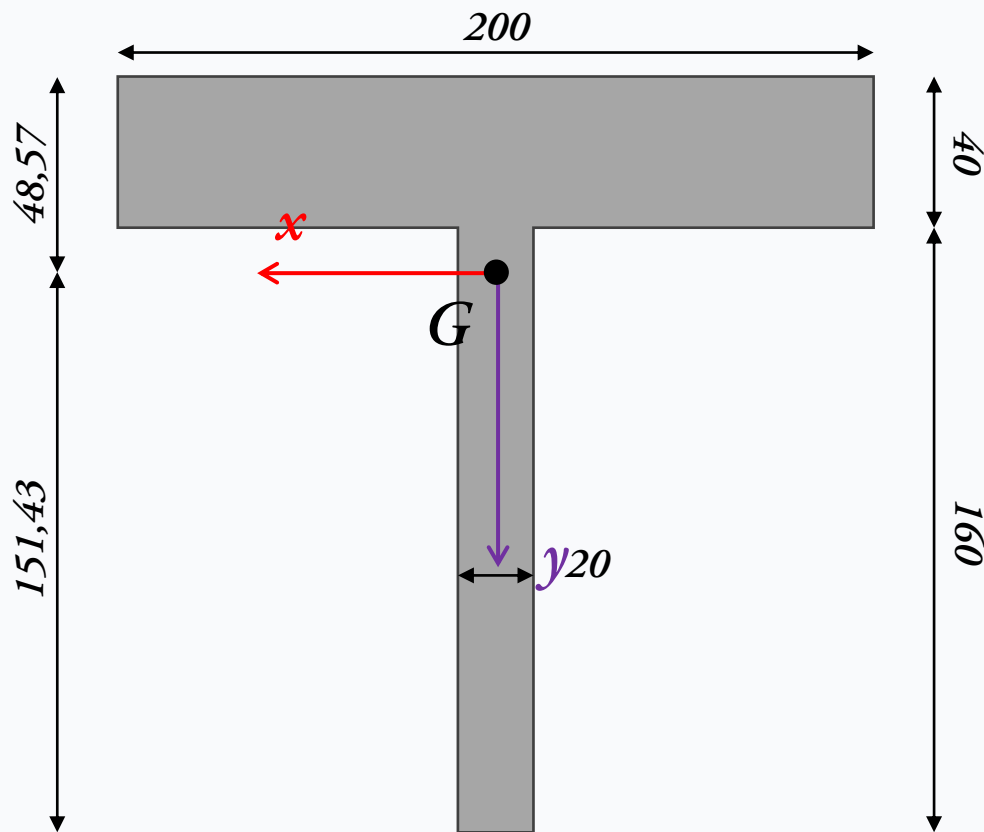
Coordinate baricentro

$$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i \cdot y'_i}{A} = \frac{544000 \text{ mm}^3}{11200 \text{ mm}^2} = 48,5714 \text{ mm}$$

$$x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i \cdot x'_i}{A} = \frac{0 \text{ mm}^3}{11200 \text{ mm}^2} = 0,00 \text{ mm}$$

Esempio di applicazione

Calcolo delle proprietà geometriche della sezione:



$$I_x = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i \cdot H_i^3}{12} + B_i H_i (y'_i - y'_G)^2 = 30750476 \text{ mm}^4$$

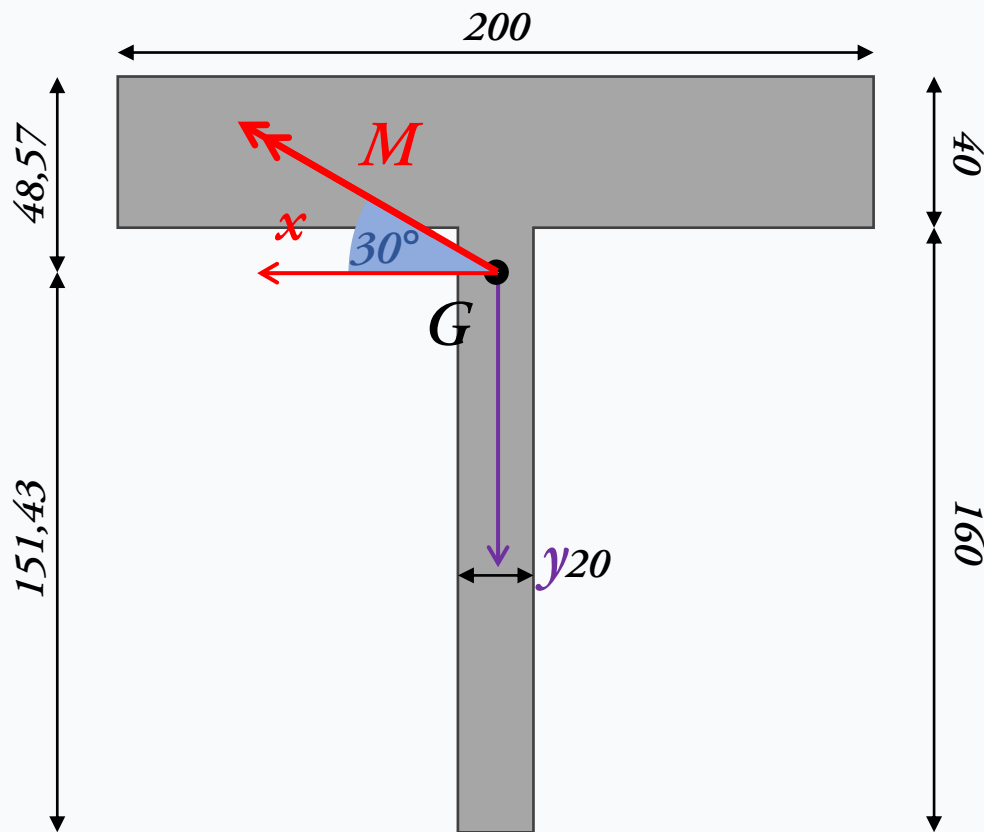
$$I_y = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i^3 \cdot H_i}{12} + B_i H_i (x'_i - x'_G)^2 = 26773333 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^3 B_i H_i (x'_i - x'_G)(y'_i - y'_G) = 0 \text{ mm}^4$$

$I_{xy} = 0 \text{ mm}^4 \gg x-y$ principali d'inerzia

Esempio di applicazione

Calcolo delle componenti di momento lungo gli assi principali:



$$\begin{cases} M_x = M \cdot \cos(30^\circ) = 15kNm \cdot \cos(30^\circ) = 12.99kNm \\ M_y = -M \cdot \sin(30^\circ) = -15kNm \cdot \sin(30^\circ) = -7.5kNm \end{cases}$$

Il segno – nella seconda equazione è dovuto al fatto che la componente del momento M lungo l'asse y ne risulta discorde.

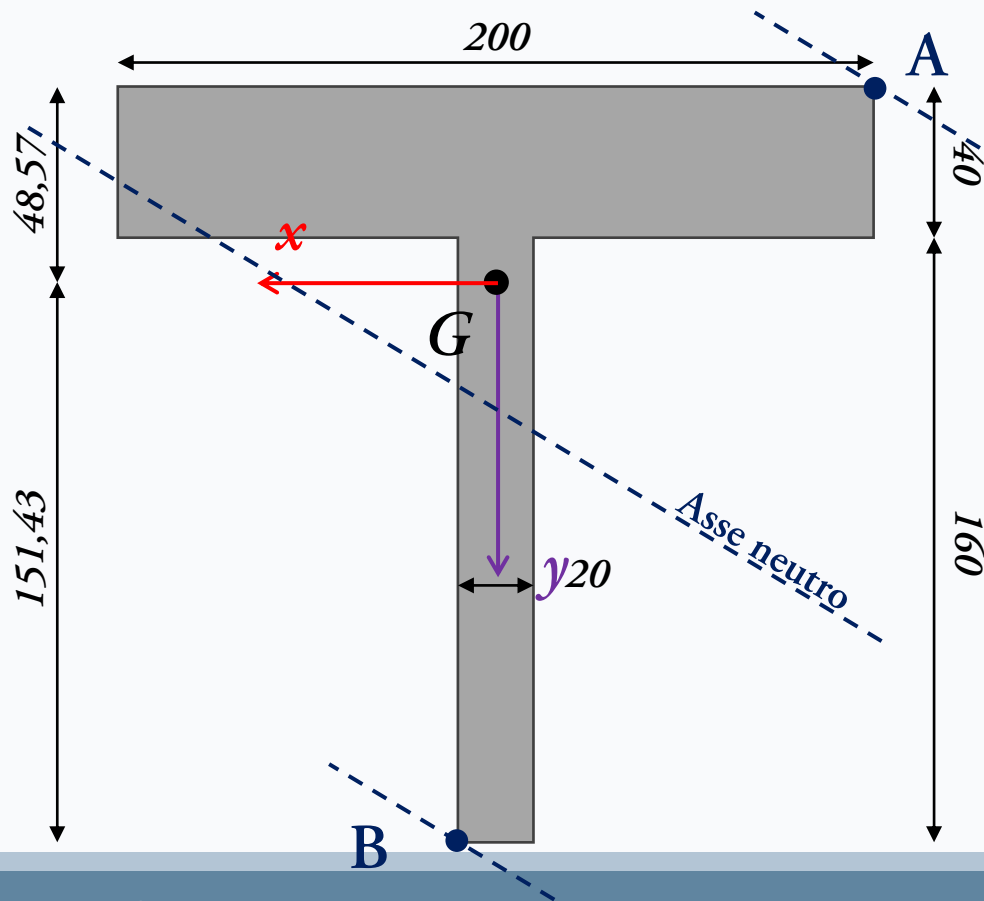
I segni sono quindi da scegliere di volta in volta osservando la coerenza delle componenti del momento rispetto agli assi principali.

L'azione assiale, essendo di compressione, risulta:

$$N = -160kN$$

Esempio di applicazione

Equazione dell'asse neutro e identificazione dei punti critici di sforzo (A, B):



$$y = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \frac{I_x}{M_x} \cdot x$$

Sostituendo:

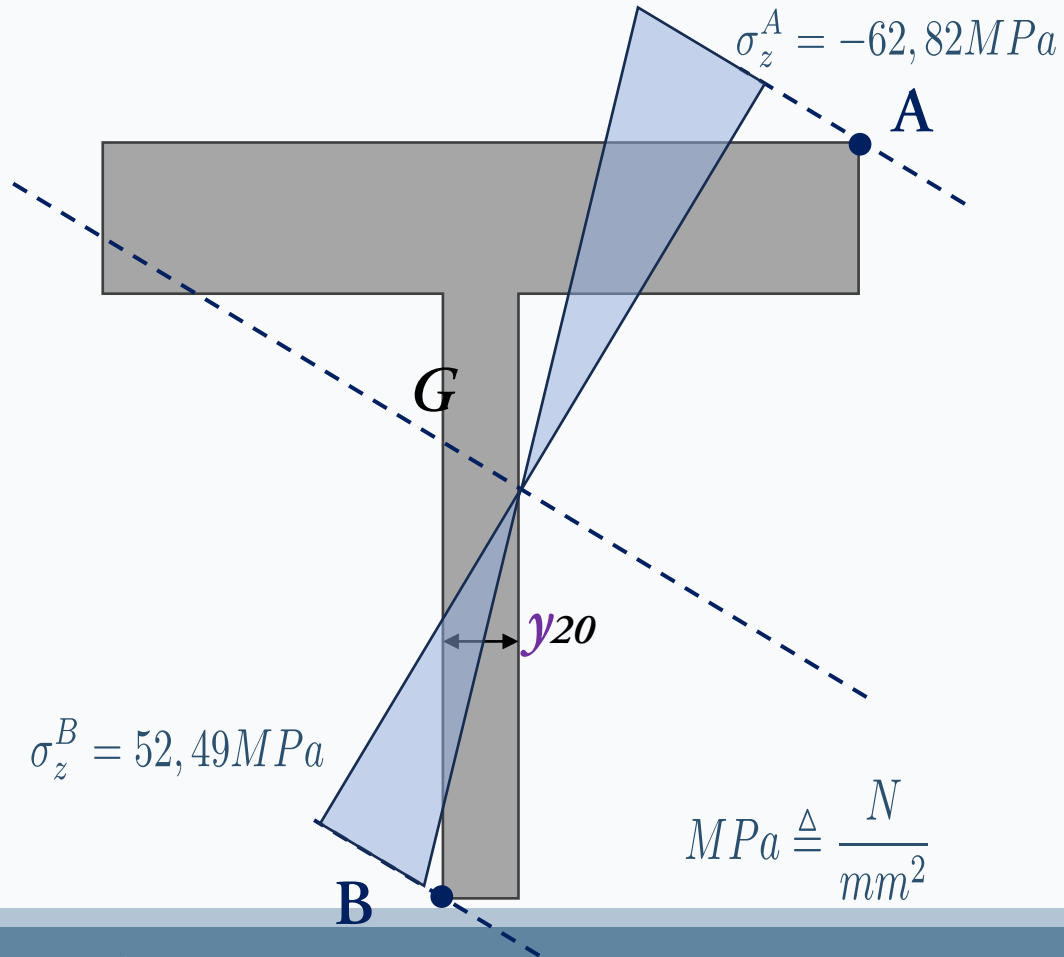
$$y = 33,817 \text{ mm} - 0,6631 \cdot x$$

Scelgo due valori casuali della variabile x e calcolo la corrispondente y .

x [mm]	y [mm]
0,00	33,82
100,00	-32,49

Esempio di applicazione

Calcolo dello sforzo nei punti A e B



Estraggo dalla figura le coordinate dei punti A e B

$$\begin{cases} x_A = -100 \text{ mm} & y_A = -48,57 \text{ mm} \\ x_B = 10 \text{ mm} & y_B = 151,43 \text{ mm} \end{cases}$$

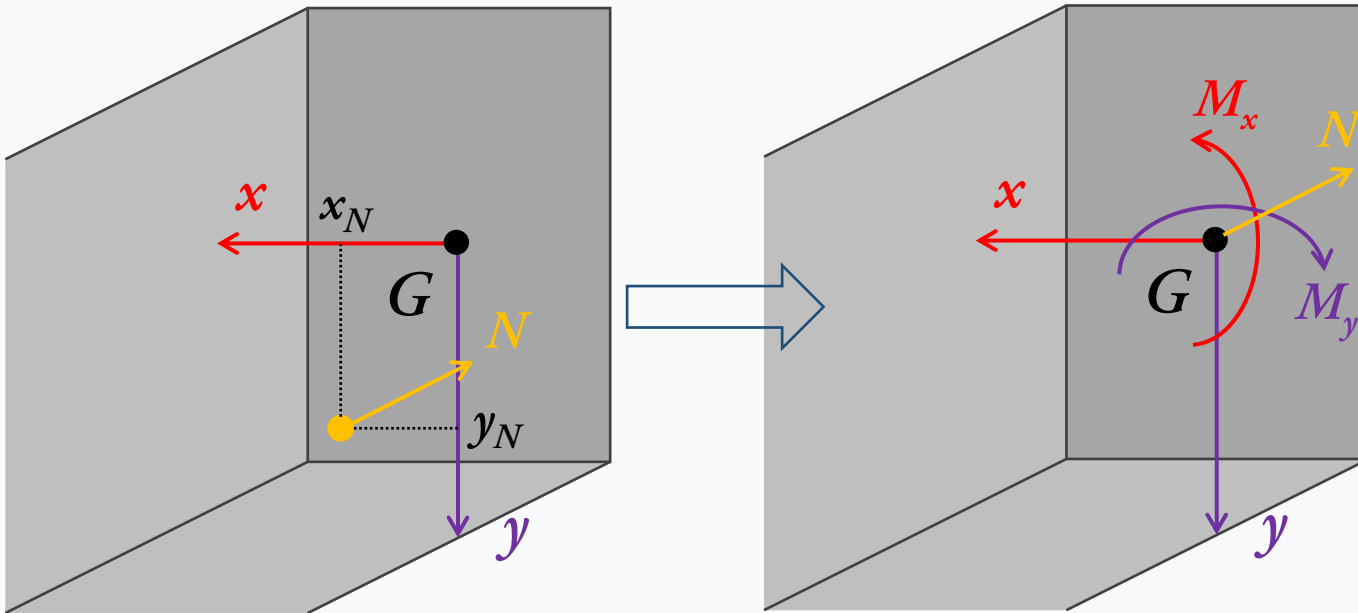
Procediamo ora con il calcolo dello sforzo (attenzione alle unità di misura: converto tutto in [N] e [mm])

$$\sigma_z^A(x_A, y_A) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A - \frac{M_y}{I_y} \cdot x_A = -62,82 MPa$$

$$\sigma_z^B(x_B, y_B) = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B - \frac{M_y}{I_y} \cdot x_B = 52,49 MPa$$

Il caso di azione assiale eccentrica

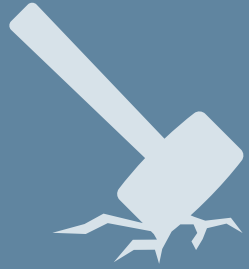
Un caso strutturale riconducibile a quello della tenso/presso-flessione è rappresentato dal carico assiale eccentrico, ovvero non agente in corrispondenza del baricentro. Questo problema può essere risolto semplicemente trasportando l'azione assiale nel baricentro ed aggiungendo i momenti di trasporto attorno agli assi principali d'inerzia.



Se conosco il valore di N (numero positivo se trazione, negativo se compressione) e le coordinate del punto di applicazione rispetto al sistema principale posso calcolare immediatamente i valori dei momenti di trasporto:

$$\begin{cases} M_x = N \cdot y_N \\ M_y = -N \cdot x_N \end{cases}$$

Nota: il segno $-$ nella seconda equazione deve essere introdotto per coerenza tra il momento calcolato e la regola della mano destra.



SFORZI NORMALI IN SEZIONI DI TRAVE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



Nicola Cefis

Politecnico di Milano
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: nicola.cefis@polimi.it

URL: www.nicolacefis.com

*Grazie per
l'attenzione!*