

# GEOMETRIA DELLE SEZIONI DI TRAVE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

# Dalla linea di trave alla sezione trasversale

---

## Premessa:

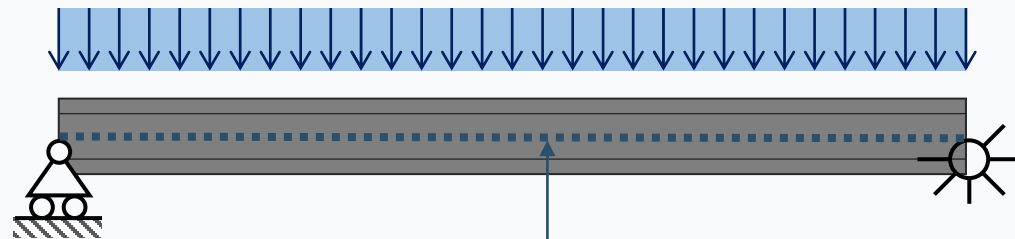
In tutte le applicazioni precedenti (analisi di strutture isostatiche ed iperstatiche) abbiamo sempre osservato la *linea di trave* senza mai porre particolare attenzione alla sezione trasversale. In particolare:

- Nell'analisi delle strutture isostatiche non abbiamo mai considerato, in alcun modo, l'effetto della sezione trasversale perché ci siamo riferiti solo ad equazioni di equilibrio;
- Nell'analisi delle strutture iperstatiche, per le quali è necessario utilizzare procedure basate sia su equilibrio-congruenza-legame elastico, abbiamo tenuto in conto delle proprietà della sezione introducendo in modo euristico una proprietà geometrica chiamata *momento d'inerzia* ed indicata con la lettera  $I$ .

Vediamo ora come calcolare questa(e) quantità...

# Dalla linea di trave alla sezione trasversale

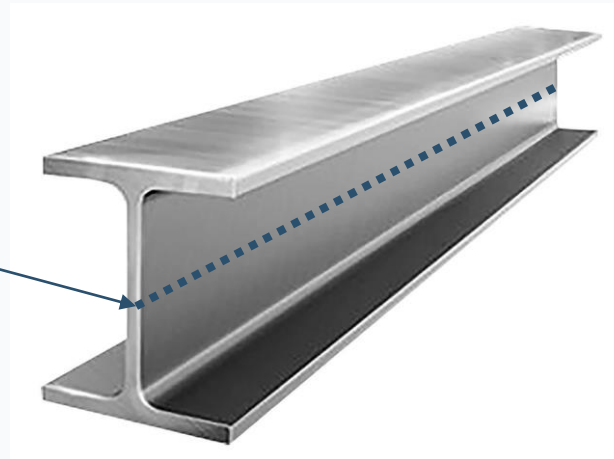
Premessa:



La linea di trave (la dimensione lunga) costituisce lo schema statico

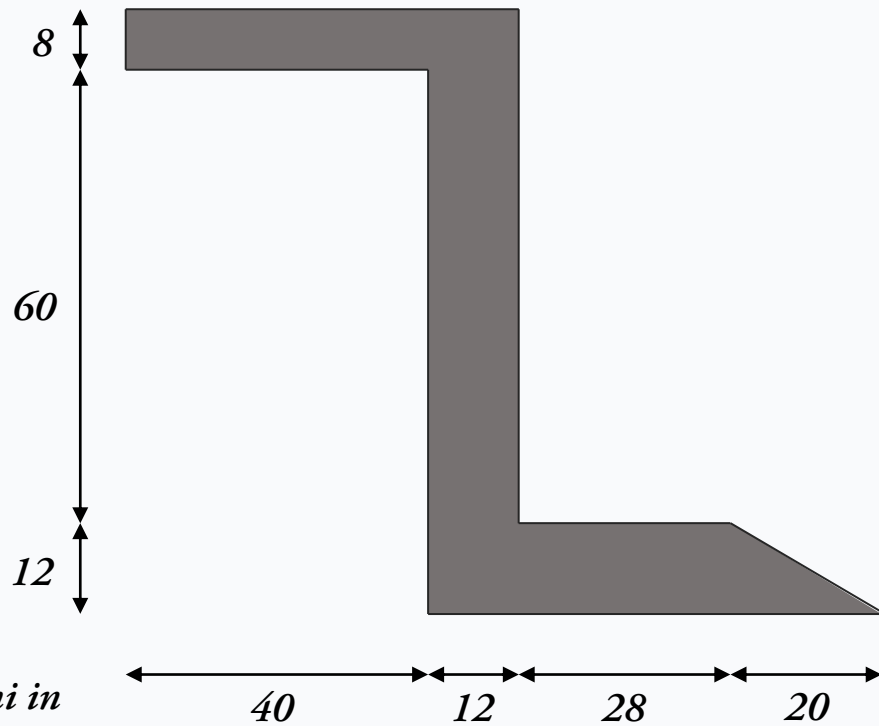


La sezione trasversale (le altre due dimensioni) permette di definire le proprietà inerziali e calcolare gli sforzi



# Caratterizzazione geometrica di sezione

Vediamo ora come procedere con il calcolo delle caratteristiche geometriche salienti di una data sezione di trave. Partiamo dal caso più generale possibile, ovvero da una sezione generica non simmetrica.



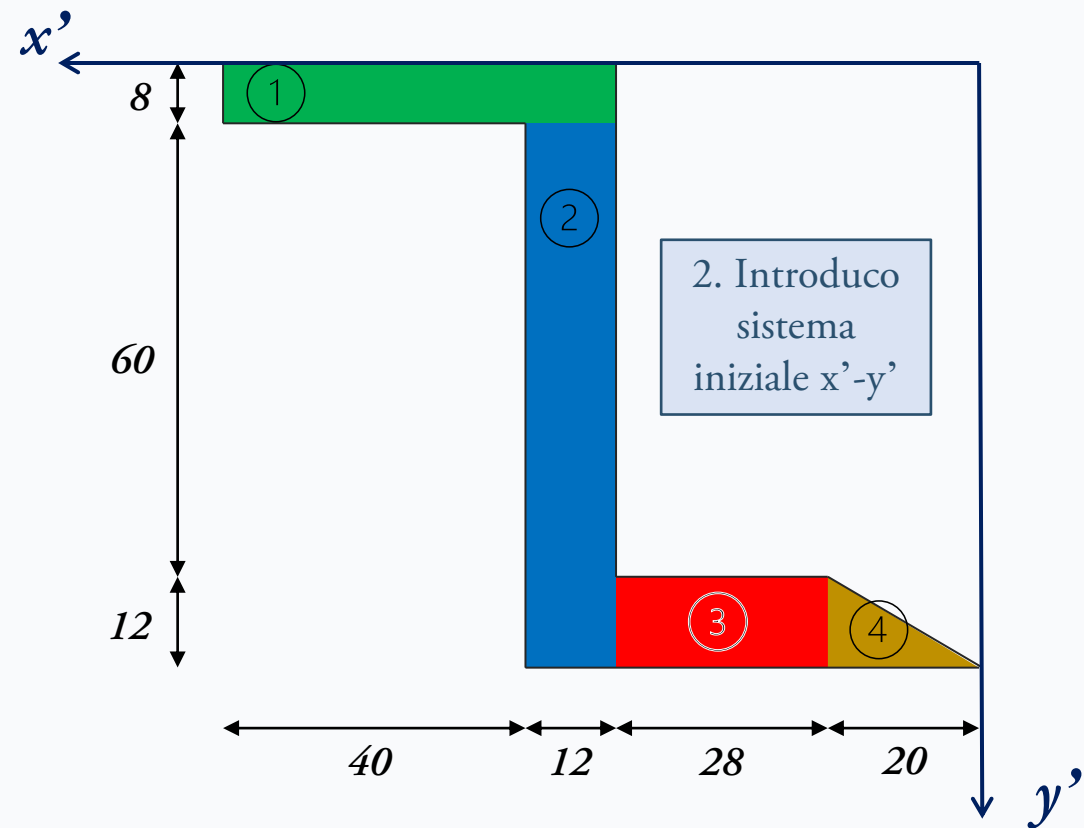
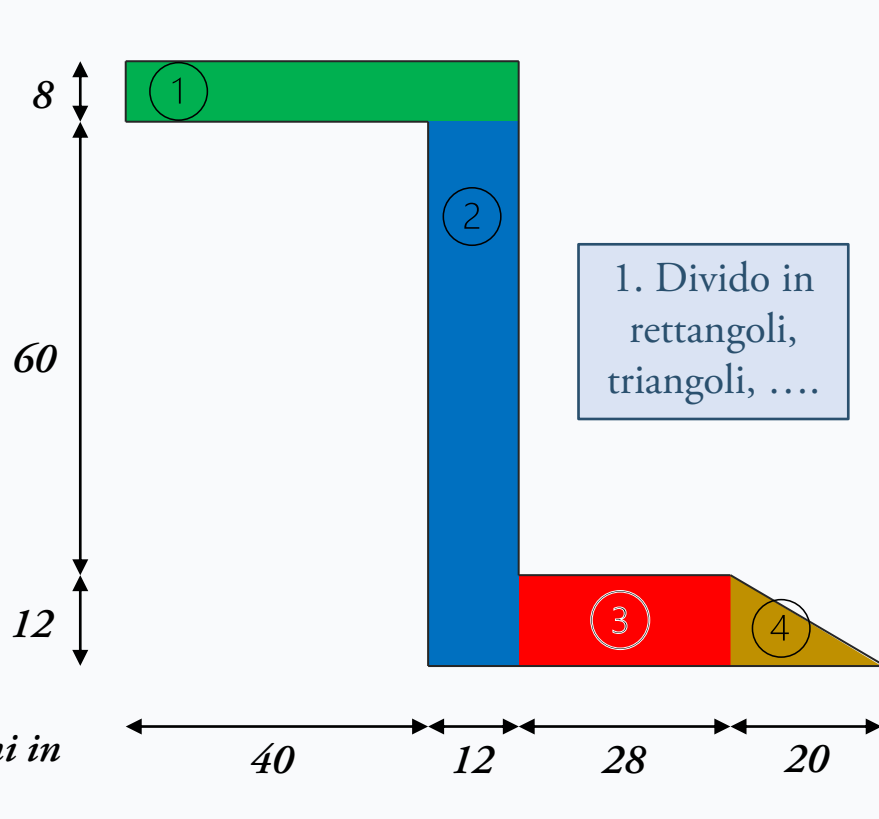
Dimensioni in  
[mm]

Procediamo per passi:

1. Divido la sezione in figure elementari;
2. Definisco un sistema di riferimento  $x'-y'$  iniziale;
3. Calcolo la posizione del baricentro  $G$  nel sistema  $x'-y'$ ;
4. Introduco un sistema di riferimento  $x-y$  passante per  $G$  e parallelo a  $x' y'$ ;
5. Calcolo i momenti d'inerzia  $I_x, I_y, I_{xy}$
6. Se  $I_{xy} \neq 0$  cerco il sistema principale d'inerzia  $u-v$ ;
7. Calcolo i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali  $u-v$ .

# Caratterizzazione geometrica di sezione

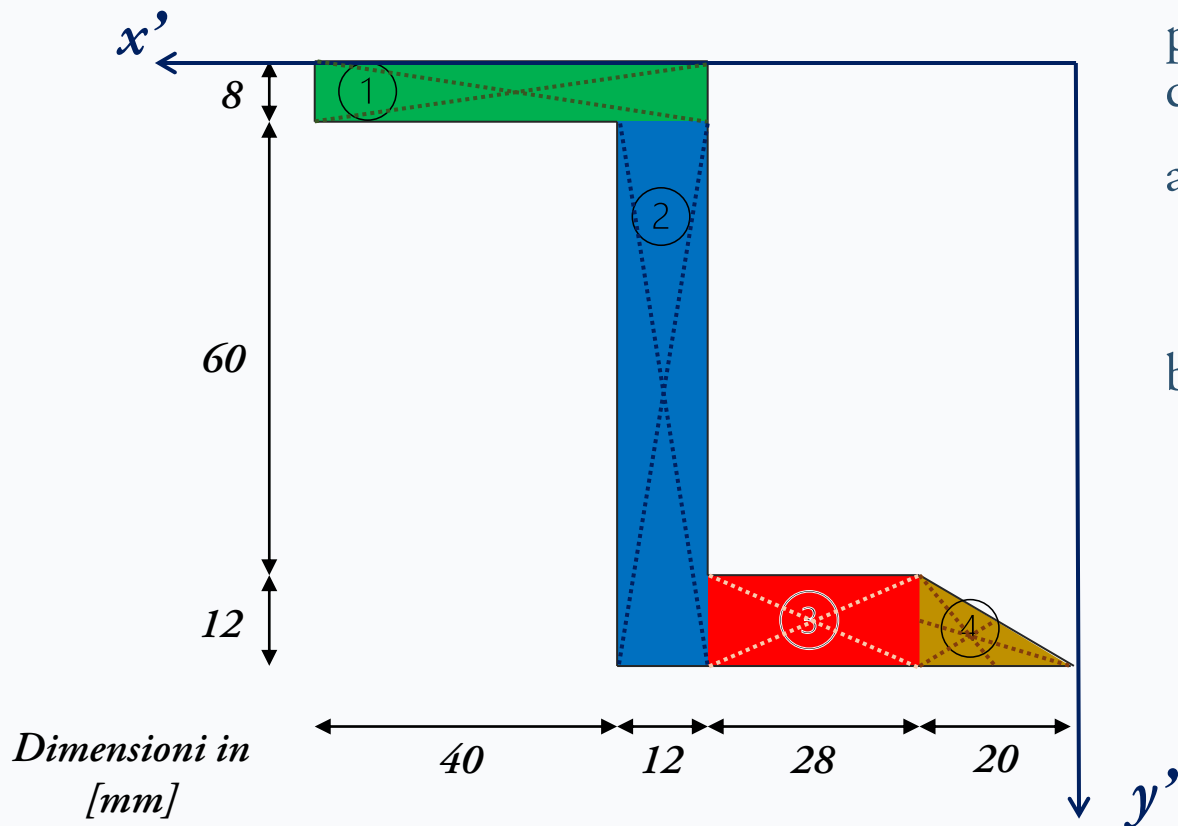
1. divido la sezione in figure elementari (rettangoli, triangoli, cerchi, ...) e 2. definisco un sistema di riferimento  $x'$ - $y'$  iniziale che contenga tutta la sezione nel primo quadrante.



Dimensioni in  
[mm]

# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 3. calcolo la posizione del baricentro G nel sistema $x'-y'$



Il baricentro costituisce un «indice di posizione» ed il punto nel quale può ritenersi concentrata *in media* l'area della figura.

- identifico il baricentro delle singole figure (rettangolo: centro delle diagonali, triangolo: centro delle mediane, ...);
- scrivo le coordinate dei singoli baricentri rispetto al sistema  $x'-y'$ .

Figura	$B_i$	$H_i$	$A_i$	$x'_i$	$y'_i$
1	52	8	416	74	4
2	12	72	864	54	44
3	28	12	336	34	74
4	20	12	120	13,333	76

# Caratterizzazione geometrica di sezione

3. calcolo la posizione del baricentro G nel sistema  $x'-y'$  >>> 4. introduco il sistema  $x-y$  passante per G

c) calcolo l'area totale della sezione

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i = 1736 \text{ mm}^2$$

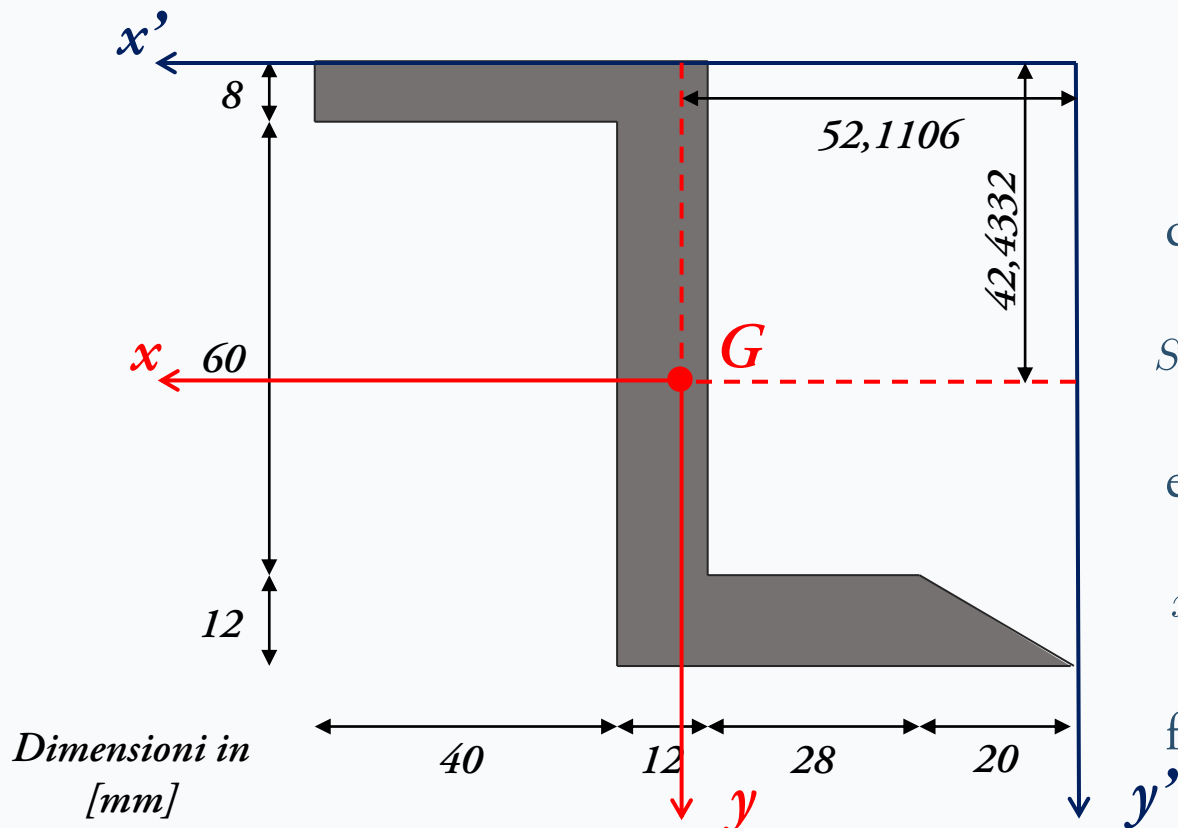
d) calcolo i momenti statici rispetto agli assi  $x'$  e  $y'$

$$S_{y'} = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot x'_i = 90464 \text{ mm}^3 \quad S_{x'} = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot y'_i = 73664 \text{ mm}^3$$

e) calcolo le coordinate del baricentro

$$x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = 52,1106 \text{ mm} \quad y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = 42,4332 \text{ mm}$$

f) introduco il sistema  $x-y$  passante per G



# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 5. Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi x - y

Come il *baricentro* rappresenta un *indice di posizione* del punto attorno al quale può essere considerata concentrata in media l'area della figura i *momenti d'inerzia* rappresentano un *indice di dispersione* dell'area rispetto agli assi attorno ai quali i momenti sono calcolati.

Il calcolo dei momenti d'inerzia dell'intera sezione ( $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$ ) rispetto agli assi  $x$  e  $y$  sono dati dalla somma dei momenti d'inerzia delle singole figure ( $I_x^i$ ,  $I_y^i$ ,  $I_{xy}^i$ ) costituenti rispetto agli assi stessi assi.

Momento d'inerzia  
rispetto  $x$

Momento d'inerzia  
rispetto  $y$

Momento d'inerzia  
centrifugo

$$I_x = \sum_{i=1}^4 I_x^i$$

$$I_y = \sum_{i=1}^4 I_y^i$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^4 I_{xy}^i$$

$I_x^i = I_{x0}^i + A_i(y_i' - y_G')^2$

$I_y^i = I_{y0}^i + A_i(x_i' - x_G')^2$

$I_{xy}^i = I_{xy0}^i + A_i(y_i' - y_G')(x_i' - x_G')$

Momenti d'inerzia della  
singola figura rispetto ai  
propri assi locali

Termine di trasporto per  
passaggio dagli assi locali di  
figura agli assi globali di sezione

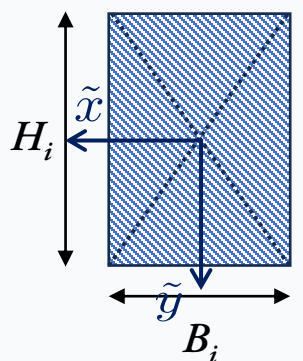
Teorema di Huygens-Steiner



# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 5. Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi x - y

I **Momenti d'inerzia della singola figura rispetto ai propri assi locali**, calcolati attraverso la definizione teorica di momento d'inerzia a cui si rimanda per approfondimenti, sono dipendenti dalla forma della figura.

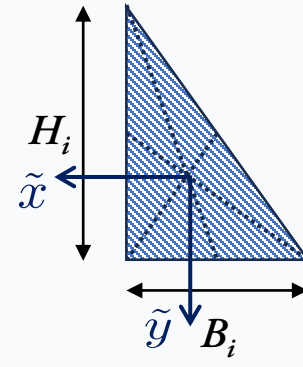


$$I_{x0}^i = \frac{B_i H_i^3}{12}$$

$$I_{y0}^i = \frac{B_i^3 H_i}{12}$$

$$I_{xy0}^i = 0$$

Rettangolo

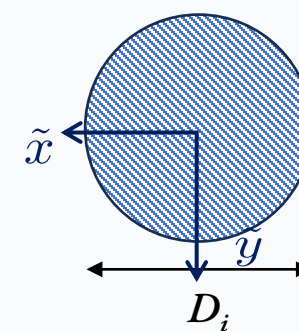


$$I_{x0}^i = \frac{B_i H_i^3}{36}$$

$$I_{y0}^i = \frac{B_i^3 H_i}{36}$$

$$I_{xy0}^i = \pm \frac{B_i^2 H_i^2}{72} (*)$$

Triangolo



$$I_{x0}^i = \frac{D_i^4}{64}$$

$$I_{y0}^i = \frac{D_i^4}{64}$$

$$I_{xy0}^i = 0$$

Cerchio

(\*) se il vertice retto tra i cateti cade nel primo o terzo quadrante locale il segno è +, in caso contrario il segno è -

# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 5. Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi x - y

Nel nostro particolare caso, sfruttando anche i risultati già ottenuti in precedenza, abbiamo:

Figura	B <sub>i</sub>	H <sub>i</sub>	A <sub>i</sub>	x' <sub>i</sub>	y' <sub>i</sub>
1	52	8	416	74	4
2	12	72	864	54	44
3	28	12	336	34	74
4	20	12	120	13,333	76

$$I_x = \sum_{i=1}^3 \frac{B_i \cdot H_i^3}{12} + B_i H_i (y'_i - y'_G)^2 + \frac{B_4 \cdot H_4^3}{36} + \frac{B_4 H_4}{2} (y'_4 - y'_G)^2$$

$$I_y = \sum_{i=1}^3 \frac{B_i^3 \cdot H_i}{12} + B_i H_i (x'_i - x'_G)^2 + \frac{B_4^3 \cdot H_4}{36} + \frac{B_4 H_4}{2} (x'_4 - x'_G)^2$$

$$x'_G = \frac{S_{y'}}{A} = 52,1106 \text{ mm}$$

$$y'_G = \frac{S_{x'}}{A} = 42,4332 \text{ mm}$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^3 B_i H_i (x'_i - x'_G)(y'_i - y'_G) + \frac{B_4^2 \cdot H_2}{72} + \frac{B_4 H_4}{2} (x'_4 - x'_G)(y'_i - y'_G)$$

# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 5. Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi x - y

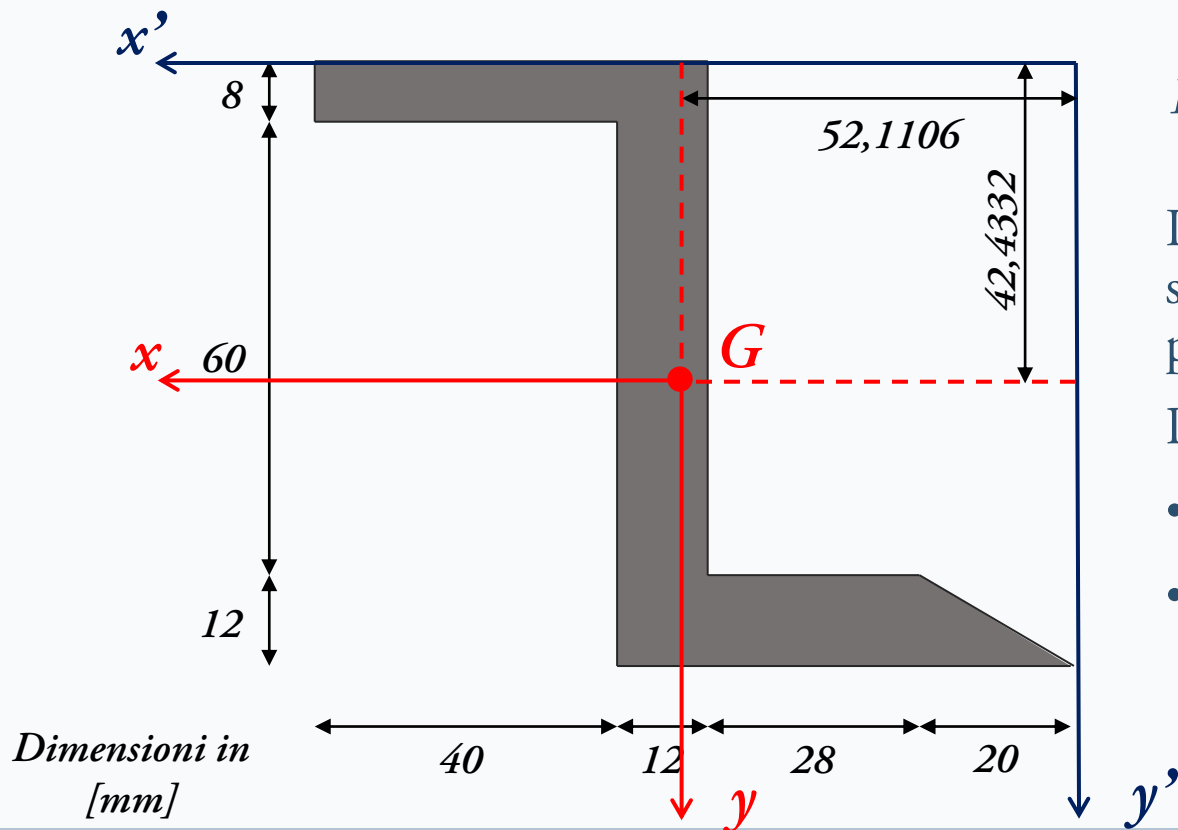
Da cui otteniamo:

$$I_x = 1467076,9 \text{ mm}^4 \quad I_y = 621781,4 \text{ mm}^4 \quad I_{xy} = -694899,2 \text{ mm}^4$$

Il momento centrifugo è non nullo pertanto gli assi  $x-y$  non sono principali d'inerzia... dobbiamo calcolare gli assi principali d'inerzia  $u-v$  della figura.

Per farlo calcoleremo:

- L'inclinazione degli assi principali  $u-v$  rispetto a  $x-y$ ;
- I valori dei momenti d'inerzia della sezione rispetto agli assi  $u-v$ .



# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 6. Calcolo l'angolo di inclinazione del sistema di riferimento principale

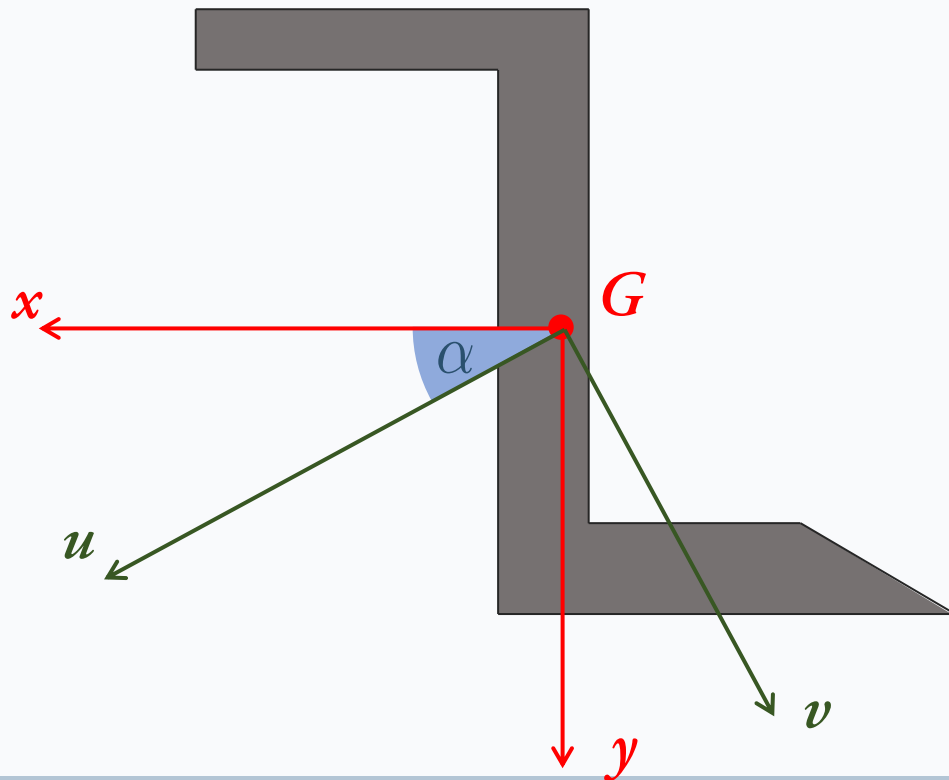
L'angolo compreso tra gli assi  $x-y$  e gli assi principali  $u-v$  è dato dalla relazione seguente (analoga a quanto visto con Mohr per gli sforzi)

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = -29.3457^\circ$$

L'angolo ottenuto:

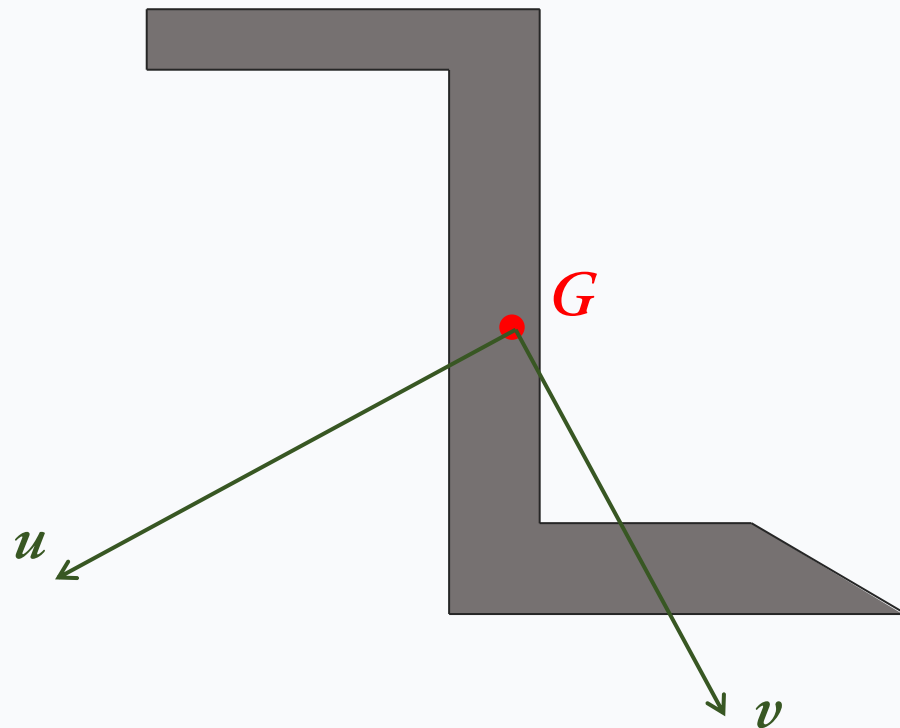
- se positivo è da ritenere orario;
- se negativo è da ritenere antiorario.

*nel nostro caso è negativo quindi antiorario*



# Caratterizzazione geometrica di sezione

## 6. Calcolo l'angolo di inclinazione del sistema di riferimento principale



Per il calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi principali  $u-v$  seguiamo una procedura analoga al cerchio di Mohr per gli sforzi.

- Calcolo Centro e Raggio:

$$C = \frac{I_x + I_y}{2} \quad R = \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{4} + I_{xy}^2}$$

- Calcolo momenti d'inerzia principali:

$$\text{- se } I_x > I_y \quad I_u = C + R \quad I_v = C - R$$

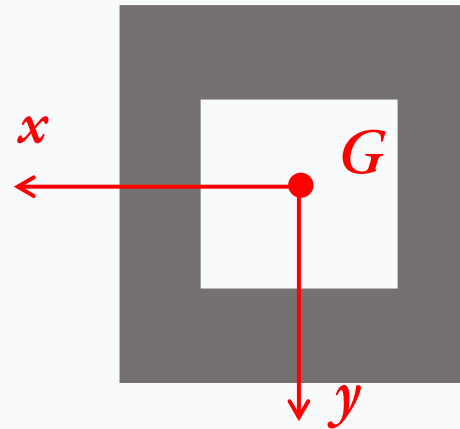
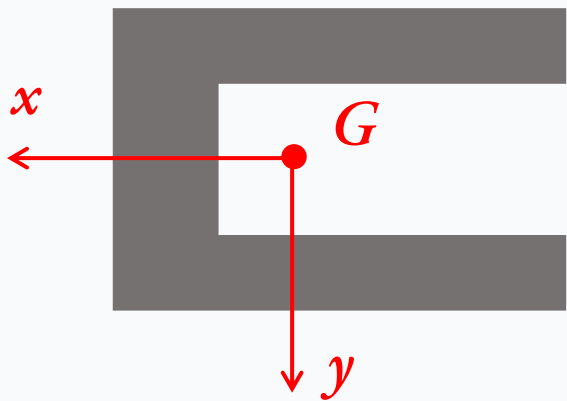
$$\text{- se } I_x < I_y \quad I_u = C - R \quad I_v = C + R$$

Nel nostro caso:

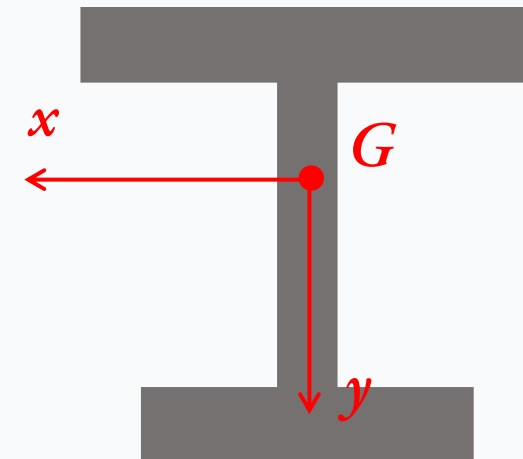
$$I_u = 2088858,3 \text{ mm}^4 \quad I_v = 845295,5 \text{ mm}^4$$

# Un caso particolare: sezioni simmetriche

Se la sezione è dotata di almeno un asse di simmetria questo sarà principale d'inerzia come lo sarà anche l'asse ortogonale ad esso e passante per il baricentro. In questi casi, del tutto prevalenti nella pratica, è conveniente orientare uno dei due assi iniziali  $x'-y'$  lungo l'asse di simmetria ed effettuare il calcolo fino al punto 5 (infatti il momento centrifugo risulterà nullo e gli assi  $x-y$  principali d'inerzia).

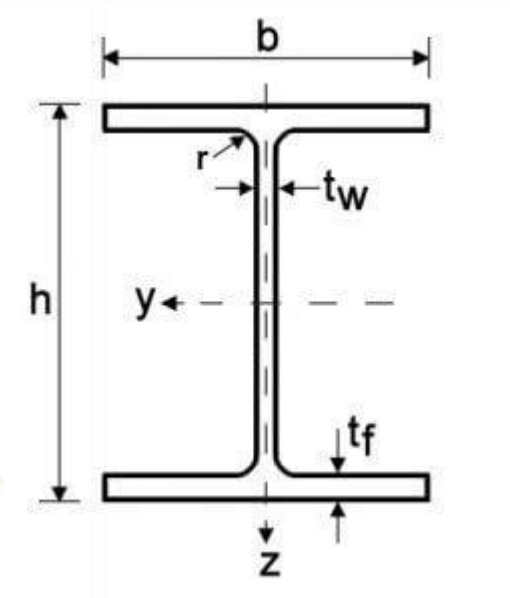
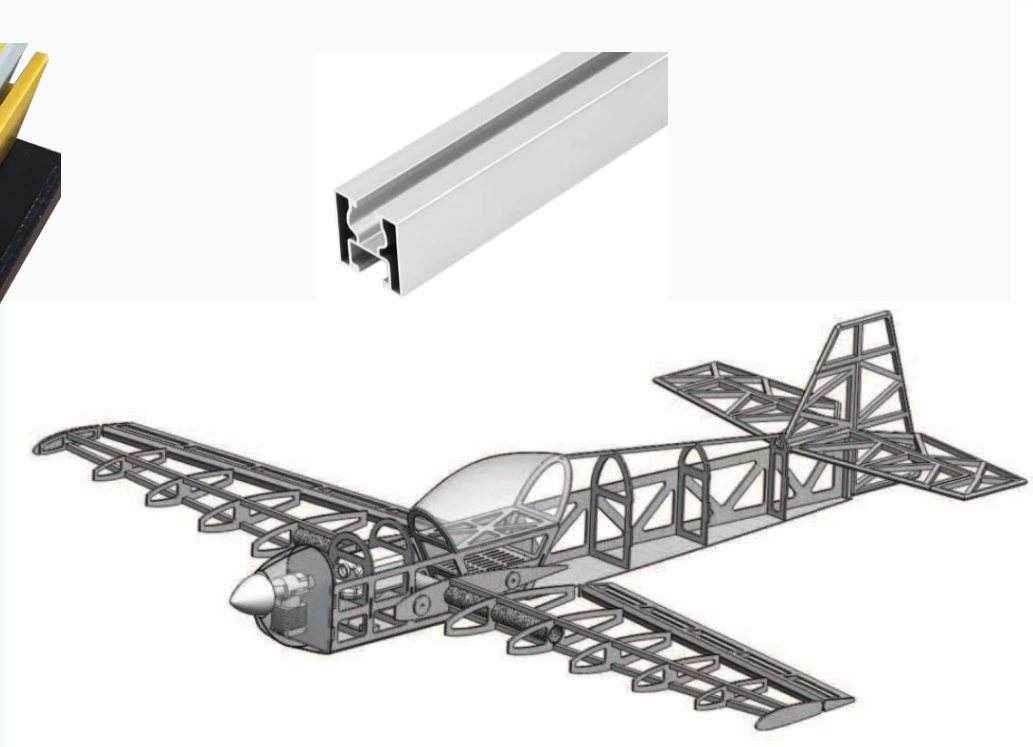
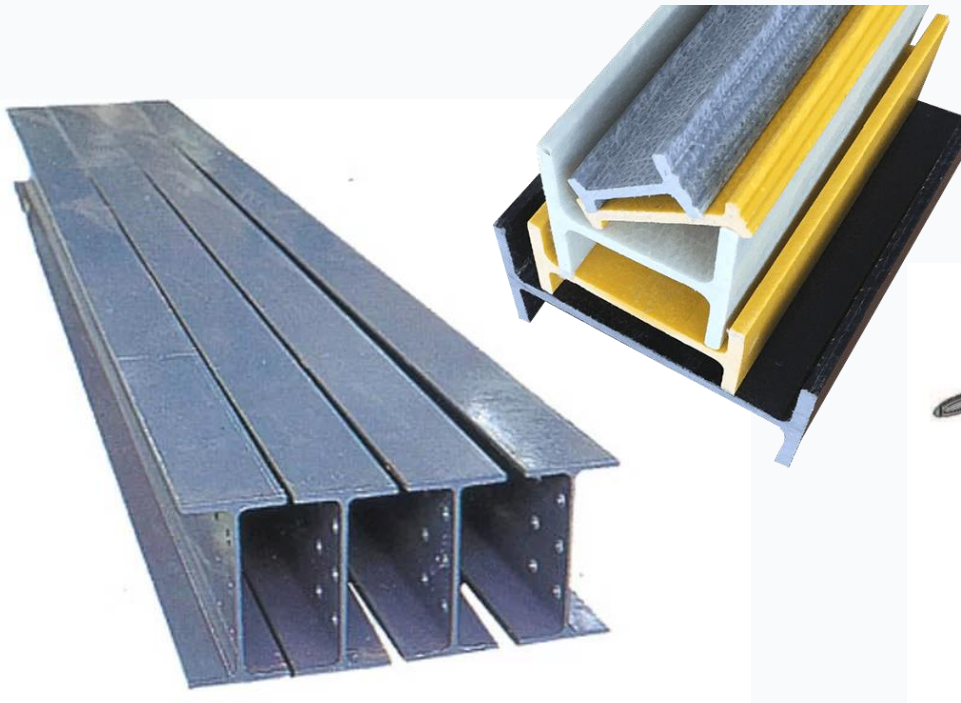


*$x-y$  già principali d'inerzia*



# L'approssimazione dei «profili sottili»

Le sezioni di trave realizzate in materiali metallici e compositi sono spesso costituite da *profili sottili* caratterizzati dall'assemblaggio di rettangoli aventi una dimensione fortemente prevalente rispetto all'altra (convenzionalmente lunghezza > 10 volte lo spessore). Possiamo applicare 2 approssimazioni...

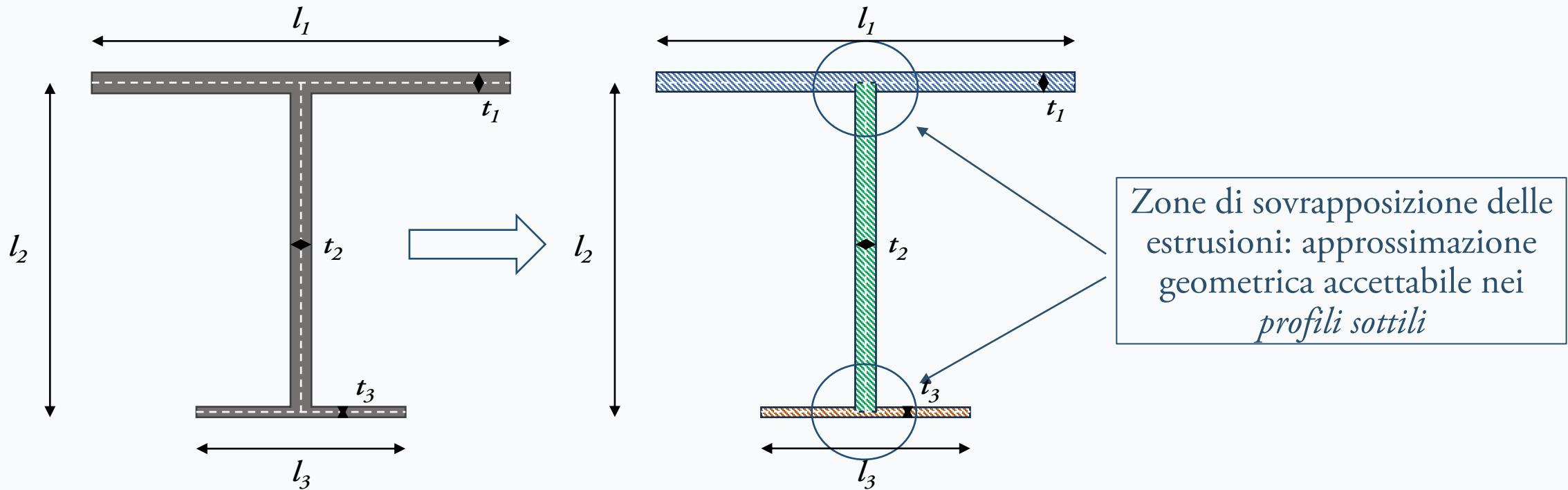


$$t_w < h/10;$$

$$t_f < b/10$$

# L'approssimazione dei «profili sottili»

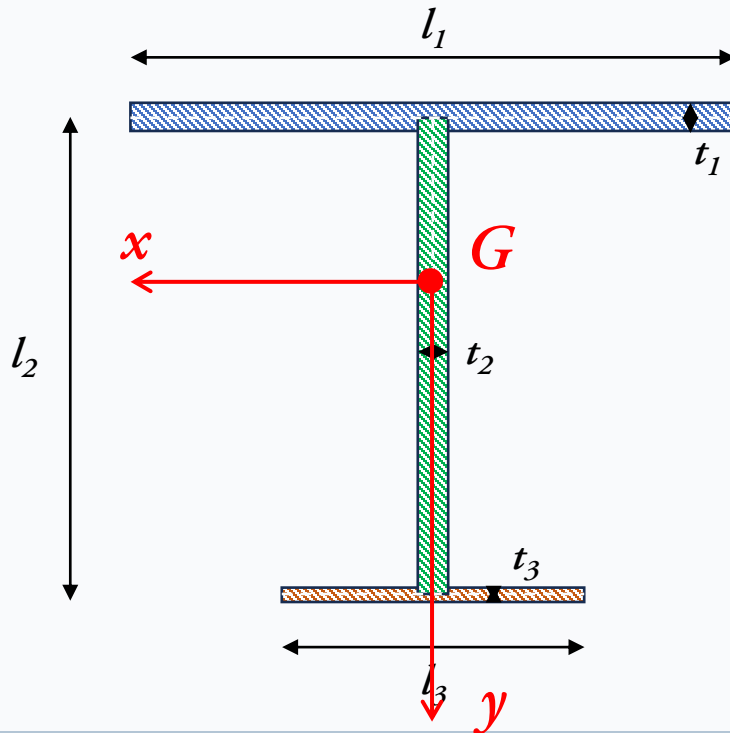
1. la geometria del profilo può essere considerata come costituita da rettangoli generati dall'estrusione delle linee medie dei rettangolo costituenti. Nella figura seguente troviamo il profilo «reale» e quello di «calcolo». Nella tabella per il calcolo delle proprietà geometriche delle aree consideriamo il profilo di calcolo composto dai rettangoli sovrapposti.





# L'approssimazione dei «profili sottili»

2. Nel calcolo del momento d'inerzia, quando lo spessore compare al cubo, può essere considerato nullo.



$$I_x = \frac{l_1 \cdot t_1^3}{12} + l_1 t_1 (y'_1 - y'_G)^2 +$$

$$+ \frac{l_2 \cdot t_2^3}{12} + l_2 t_2 (y'_2 - y'_G)^2 +$$

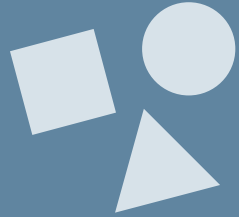
$$+ \frac{l_3 \cdot t_3^3}{12} + l_3 t_3 (y'_3 - y'_G)^2$$



$$I_x \equiv l_1 t_1 (y'_1 - y'_G)^2 +$$

$$+ \frac{l_2 \cdot t_2^3}{12} + l_2 t_2 (y'_2 - y'_G)^2 +$$

$$+ l_3 t_3 (y'_3 - y'_G)^2$$



# GEOMETRIA DELLE SEZIONI DI TRAVE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

*Grazie per  
l'attenzione!*