



# ANALISI STATICA DELLE STRUTTURE BIDIMENSIONALI CON IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

# Equilibrio, congruenza e legame costitutivo

---

## Soluzioni basate su sole equazioni di equilibrio:

- Applicabili solo al calcolo di reazioni vincolari ed azioni interne in strutture isostatiche;
- Non permettono di valutare altri campi di interesse quali spostamenti o deformazioni nella struttura.

## Soluzioni basate su equilibrio, congruenza e legame costitutivo:

- Consentono il calcolo delle reazioni vincolari in un qualsiasi sistema strutturale (ipostatico auto-equilibrato, isostatico o iperstatico);
- Consentono la valutazione degli spostamenti in un qualsiasi sistema strutturale.

Principio Lavori Virtuali

Metodo della Linea Elastica

Teoremi energetici

# Il Principio dei Lavori Virtuali

Data una qualsiasi struttura (ipostatica auto-equilibrata, isostatica e iperstatica) vale la seguente relazione:

$$L_e = L_i$$

## Lavoro delle azioni esterne:

- Forze e momenti agenti sulla struttura;
- Reazioni vincolari.

## Lavoro delle azioni interne:

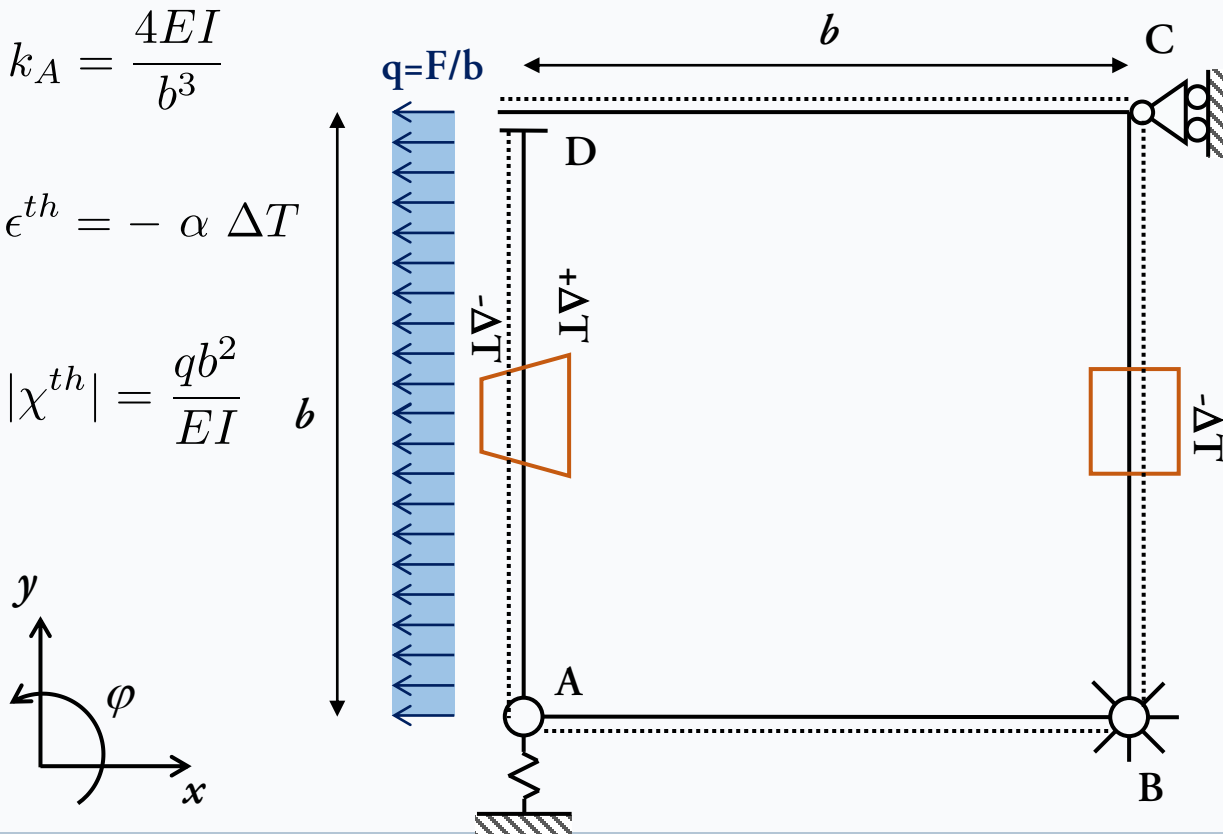
- Azioni N, T, M (ed eventuale momento torcente) agenti all'interno di ogni asta.

Il PLV è un concetto del tutto generale e che può essere utilizzato in molti contesti di meccanica strutturale e generale. Noi daremo enfasi all'utilizzo del PLV per:

- Calcolo di spostamenti in strutture isostatiche;
- Calcolo di reazioni vincolari in strutture iperstatiche.

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 1: ANALISI CINEMATICA



Calcolo i Gradi di Libertà ed i Gradi di Vincolo:

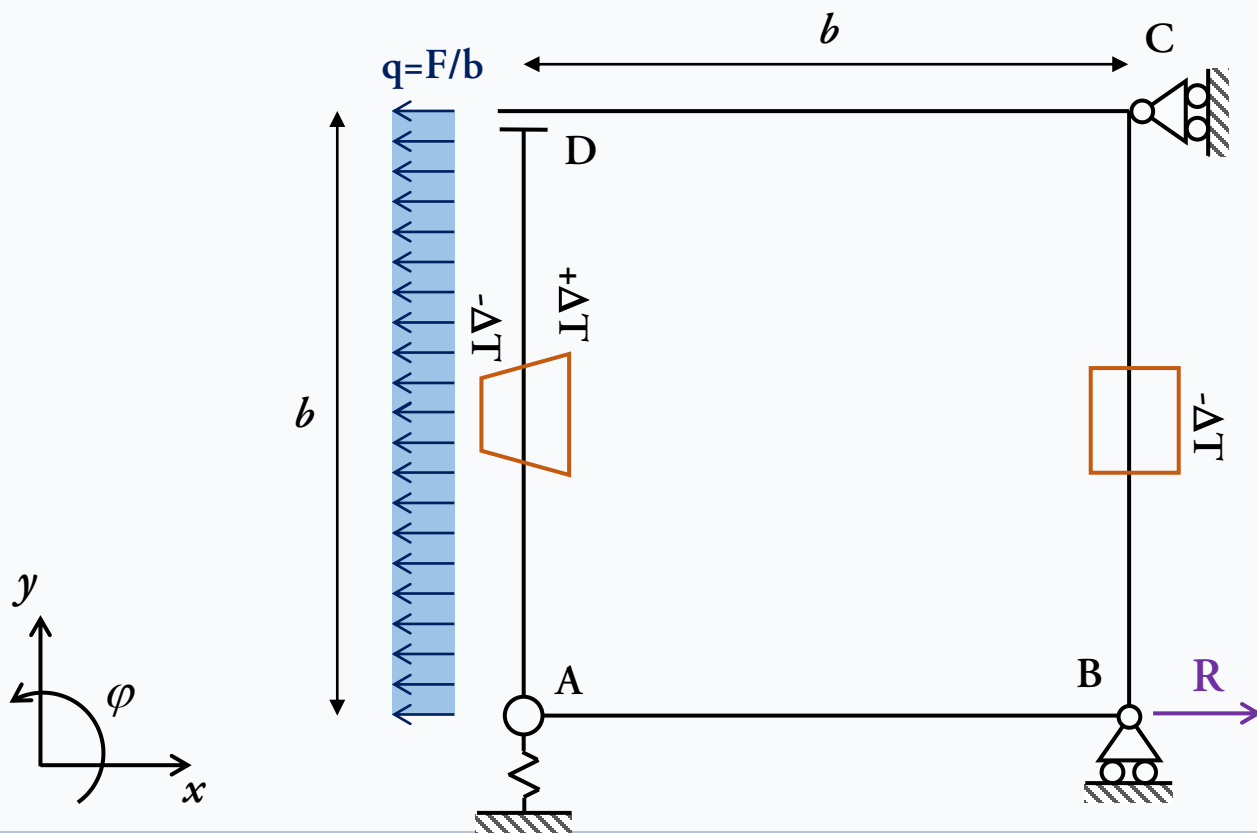
1.  $GDL = 3 \times 3 = 9$
2. GDV:
  - Punto A: 2 cerniera interna + 1 molla;
  - Punto B: 4 cerniera a terra;
  - Punto C: 1 carrello a terra;
  - Punto D: 2 pattino interno.

$GDL = 10$

-- Struttura una volta iperstatica --

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 2: DECLASSAMENTO STRUTTURALE



Procedo togliendo un vincolo (interno o esterno) e mettendo in evidenza la forza o il momento che esso esercita (incognita iperstatica  $R$ ).

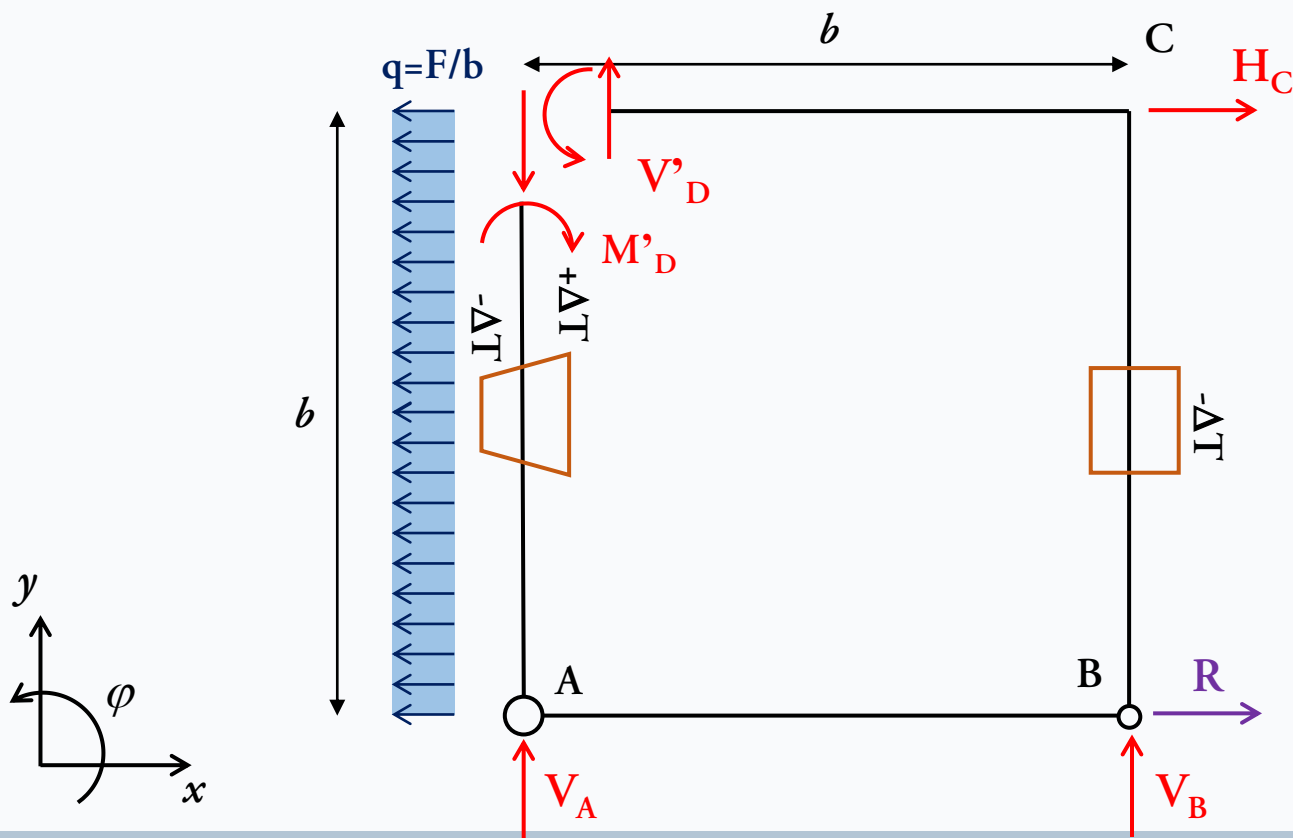
- L'azione che metto in evidenza la tratto come una forza/momento noto;
- Il declassamento deve essere tale da rendere la struttura **isostatica e non labile**.

Una possibile scelta consiste nel trasformare la cerniera a terra B in un carrello a terra.

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 3: CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

Calcolo le reazioni vincolari funzione dei carichi esterni e dell'incognita iperstatica  $R$ .



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & H_C + R - F = 0 \\ \sum F_y = 0 & V_A + V_B = 0 \\ \sum M_D = 0 & -F b/2 + V_B b + R = 0 \end{cases}$$

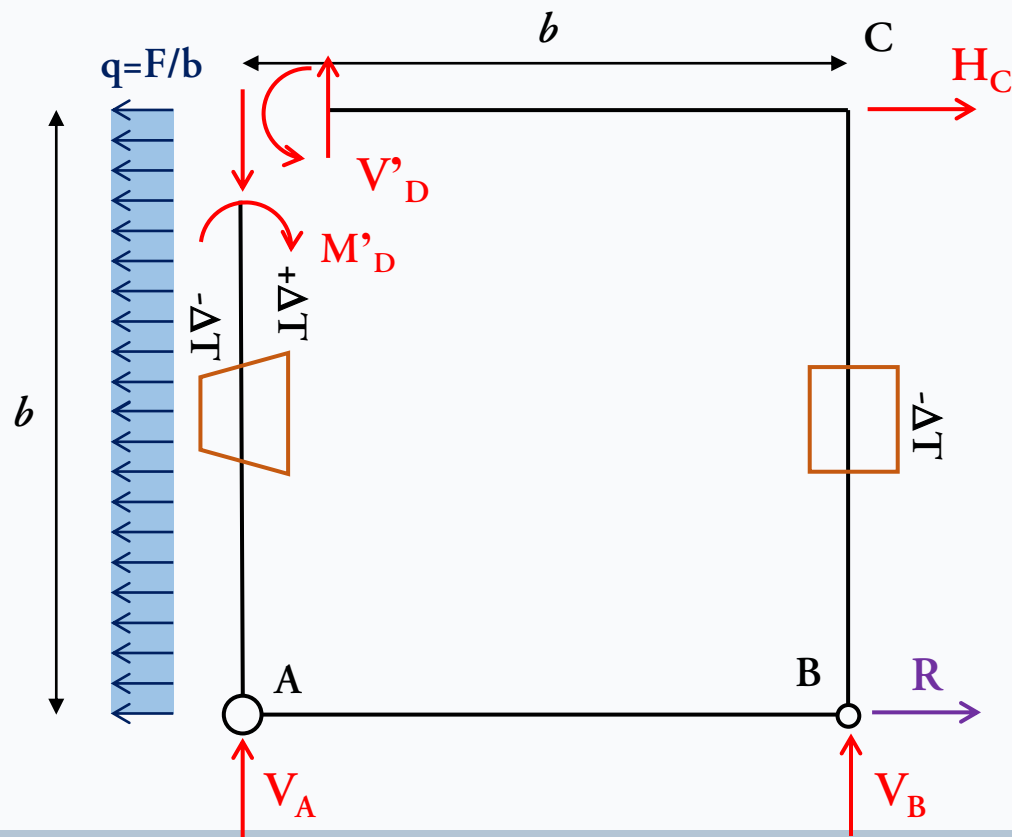
$$H_C = F - R \quad V_B = F/2 - R \quad V_A = R - F/2$$

$$\begin{cases} \sum M_A^{AD} = 0 & F b/2 - M_D = 0 \\ \sum M_B^{BD} = 0 & -V_D b - H_C b + M_D = 0 \end{cases}$$

$$M_D = F b/2 \quad V_D = -F/2 + R$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 4: PARTIZIONAMENTO IN SOTTOSTRUTTURE

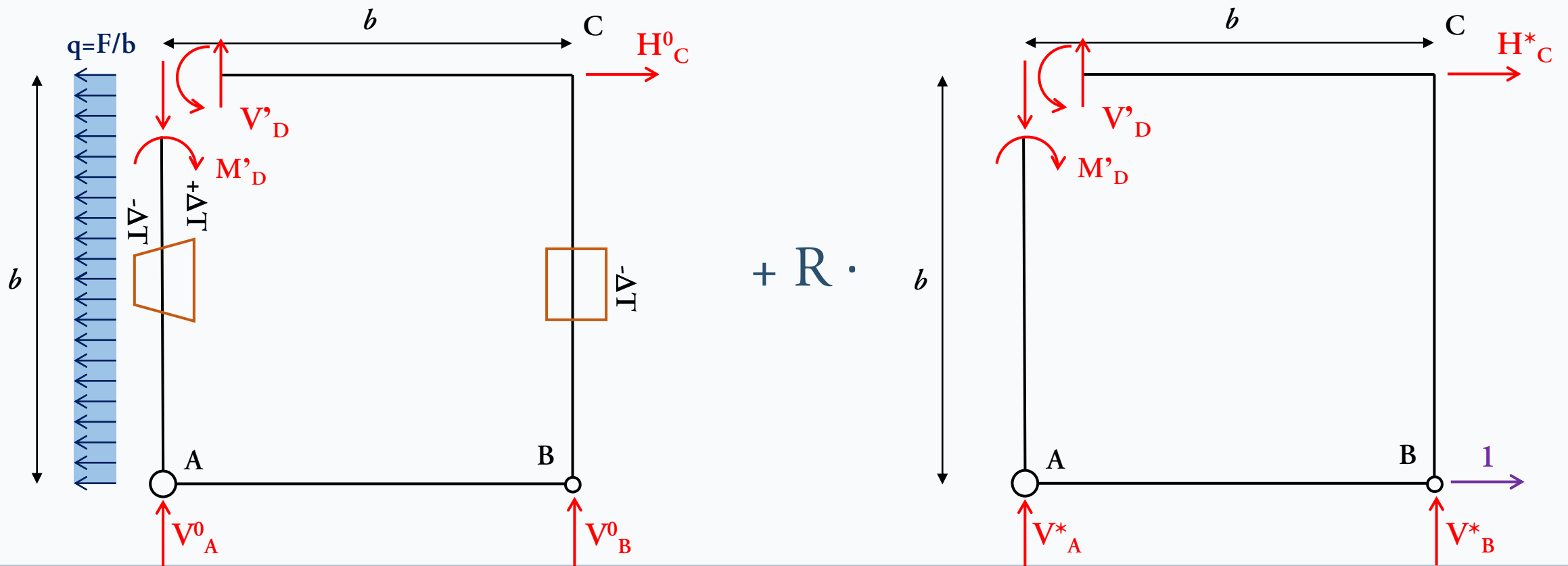


I valori delle reazioni così calcolati sulla struttura originaria declassata (detta struttura reale  $\wedge$ ) vengono ora distinti in due componenti associate a due sottostrutture distinte:

- Una struttura principale (detta struttura 0) soggetta solo ai carichi esterni noti.
- Una struttura ausiliaria (detta struttura \*) soggetta solo all'azione dell'incognita iperstatica assunta di valore unitario.

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 4: PARTIZIONAMENTO IN SOTTOSTRUTTURE





# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 4: PARTIZIONAMENTO IN SOTTOSTRUTTURE

### Reazioni vincolari della struttura reale ^

$$H_C = F - R \quad V_B = F/2 - R \quad V_A = R - F/2 \quad M_D = F b/2 \quad V_D = -F/2 + R$$

### Reazioni vincolari della struttura principale 0

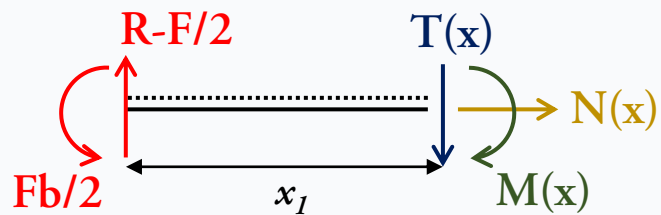
$$H_C^0 = F \quad V_B^0 = F/2 \quad V_A^0 = -F/2 \quad M_D^0 = F b/2 \quad V_D^0 = -F/2$$

### Reazioni vincolari della struttura ausiliaria \*

$$H_C^* = -1 \quad V_B^* = -1 \quad V_A^* = 1 \quad M_D^* = 0 \quad V_D^* = 1$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 5: CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE NEI VARI TRATTI



$$\begin{cases} \sum F_N = 0 & N(x_1) = 0 \\ \sum F_T = 0 & T(x_1) - (R - F/2) = 0 \\ \sum M = 0 & M(x_1) - Fb/2 + (R - F)x_1 = 0 \end{cases}$$

Azioni di interesse al PLV per struttura principale 0

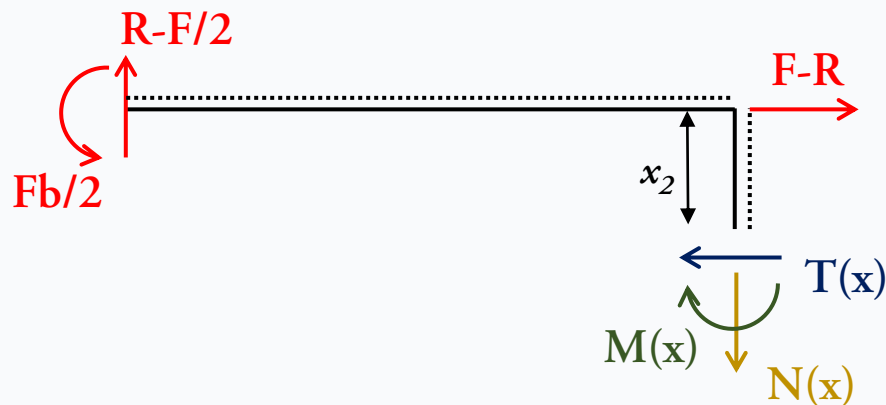
$$M^0(x_1) = \frac{Fb}{2} + \frac{Fx_1}{2}$$

Azioni di interesse al PLV per struttura ausiliaria \*

$$N^*(x_1) = 0 \quad M^*(x_1) = -x_1$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 5: CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE NEI VARI TRATTI



$$\begin{cases} \sum F_N = 0 & N(x_2) - (R - F/2) = 0 \\ \sum F_T = 0 & T(x_2) - (F - R) = 0 \\ \sum M = 0 & M(x_2) - Fb/2 + (R - F/2)b + (F - R)x_2 = 0 \end{cases}$$

Azioni di interesse al PLV per struttura principale 0

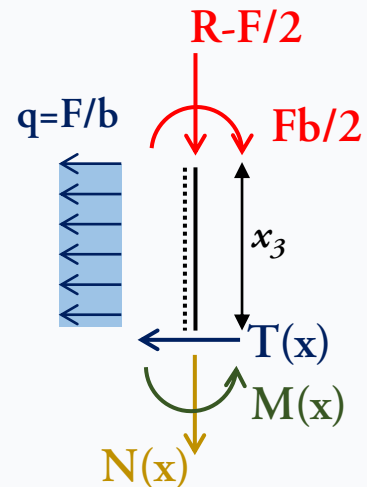
$$M^0(x_2) = F(b - x_2)$$

Azioni di interesse al PLV per struttura ausiliaria \*

$$N^*(x_2) = 1 \quad M^*(x_2) = -(b - x_2)$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

PUNTO 5: CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE NEI VARI TRATTI



$$\begin{cases} \sum F_N = 0 & N(x_3) + (R - F/2) = 0 \\ \sum F_T = 0 & T(x_3) + q x_3 = 0 \\ \sum M = 0 & M(x_3) + q x_3^2/2 - F b/2 = 0 \end{cases}$$

Azioni di interesse al PLV per struttura principale 0

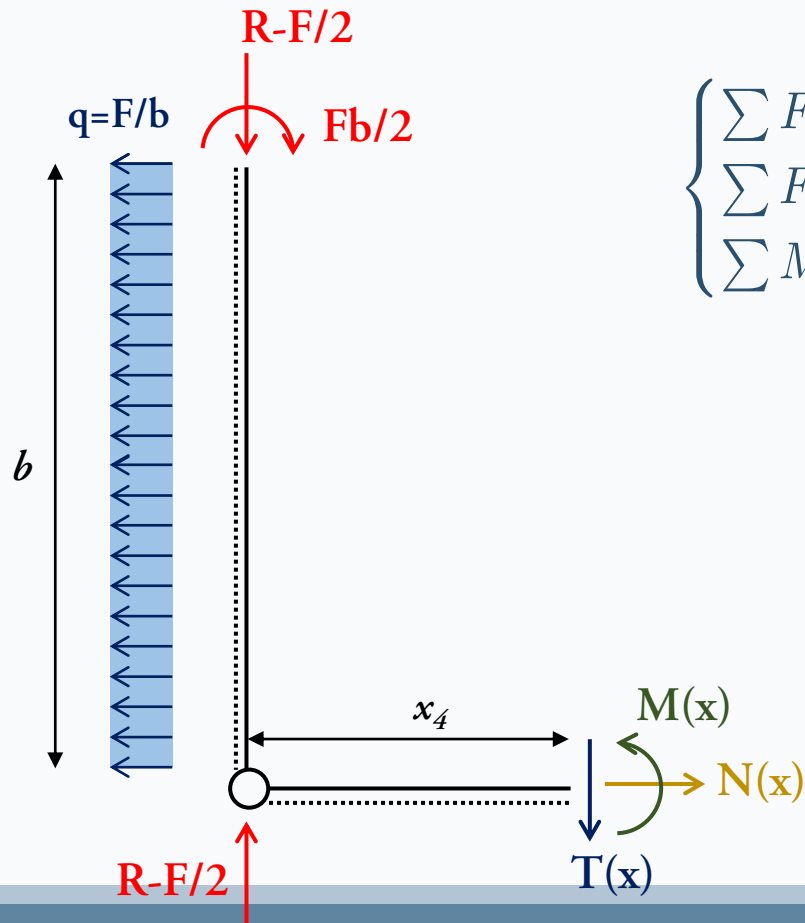
$$M^0(x_3) = F b/2 - q x_3^2/2$$

Azioni di interesse al PLV per struttura ausiliaria \*

$$N^*(x_3) = -1 \quad M^*(x_3) = 0$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

PUNTO 5: CALCOLO DELLE AZIONI INTERNE NEI VARI TRATTI



$$\begin{cases} \sum F_N = 0 & N(x_4) - F = 0 \\ \sum F_T = 0 & T(x_4) = 0 \\ \sum M = 0 & M(x_4) = 0 \end{cases}$$

Azioni di interesse al PLV per struttura ausiliaria \*

$$N^*(x_4) = 0 \quad M^*(x_4) = 0$$

Azioni di interesse al PLV per struttura principale 0

$$M^0(x_4) = 0$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 6: SCRITTURA DEL PLV

$$\textcircled{L_e} = \textcircled{L_i} \rightarrow L_e = L_i^{\text{aste}} + L_i^{\text{mol. est.}} + L_i^{\text{mol. rot.}}$$

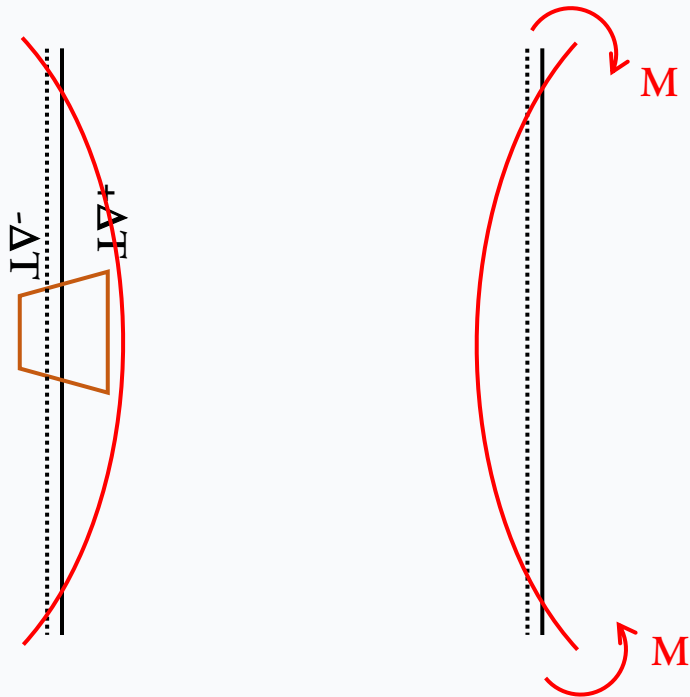
$$L_e = \sum_{i=1}^{\text{num. RV}} Rv^* \cdot \Delta_i$$

$$L_i^{\text{aste}} = \sum_{i=1}^{\text{num. aste}} \int_0^{l_i} N^*(x_i) \cdot \epsilon^{th} + M^*(x_i) \cdot \left( \frac{M^0(x_i) + R M^*(x_i)}{EI} \pm \chi^{th} \right) dx$$

$$L_i^{\text{mol. est.}} = \sum_{i=1}^{\text{num. mol. est.}} F_i^* \frac{F_i^0 + R \cdot F_i^*}{k_i} \quad L_i^{\text{mol. rot.}} = \sum_{i=1}^{\text{num. mol. rot.}} M_i^* \frac{M_i^0 + R \cdot M_i^*}{k_i}$$

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

## PUNTO 6: SCRITTURA DEL PLV



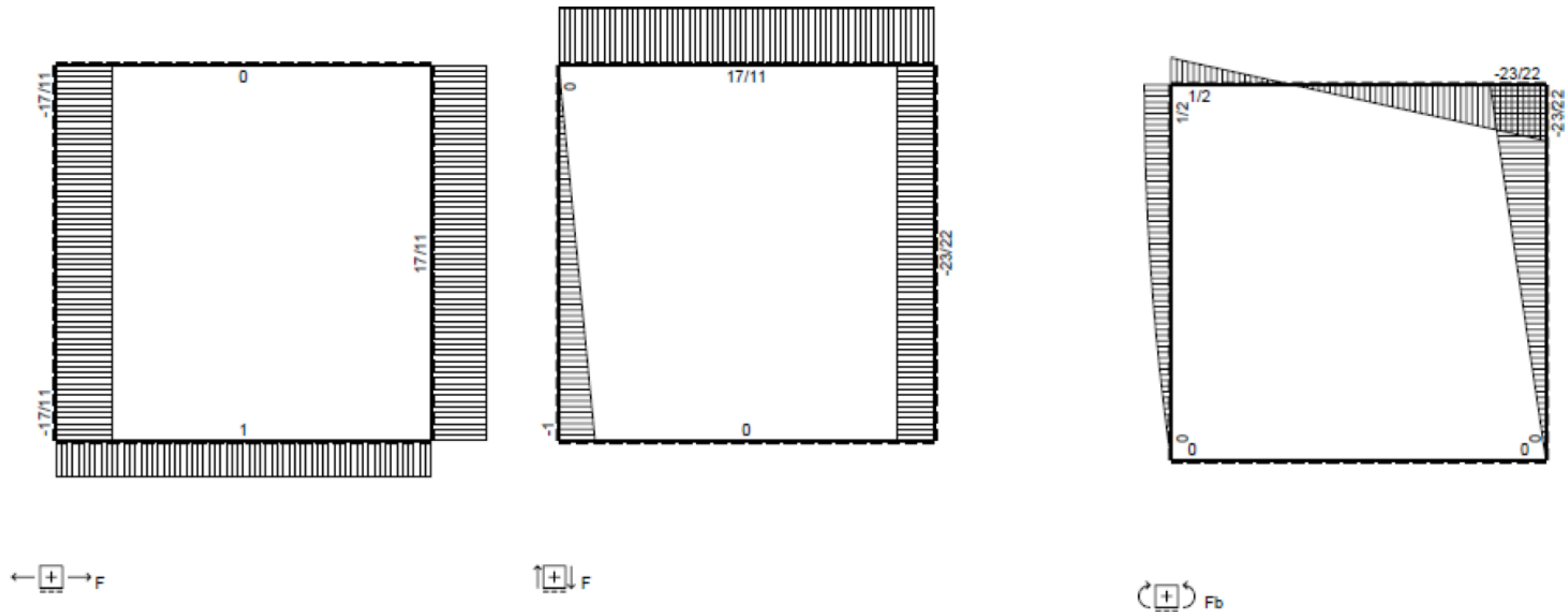
Come valuto il segno della curvatura termica?

1. Disegno il tratto soggetto al carico termico e la sua deformata attesa in seguito al riscaldamento differenziale;
2. Disegno la stessa aste mettendo in evidenza una coppia di momenti flettenti positivi e la curvatura da essi provocata.
3. Se le due curvature sono concordi la curvatura termica è positiva, se sono discordi (come in questo caso) il segno della curvatura termica è negativo.

# Reazioni e azioni struttura iperstatica

PUNTO 7: SOLUZIONE ALGEBRICA DELL'EQUAZIONE DEI LAVORI VIRTUALI

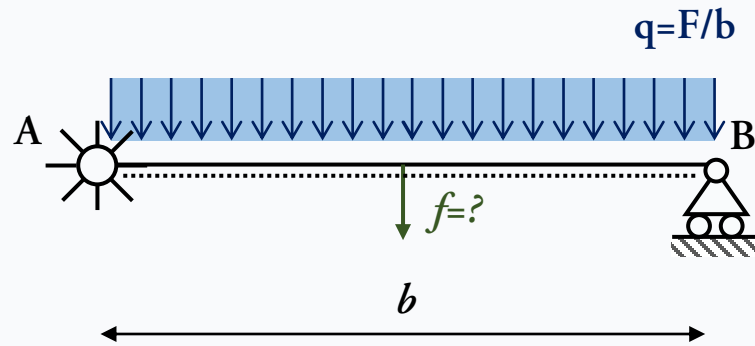
$$R = \frac{45}{22}F$$





# Spostamenti struttura isostatica

## PUNTO 1: ANALISI CINEMATICA



*Quanto vale lo spostamento verticale del punto di mezzeria della trave A-B?*

Calcolo i Gradi di Libertà ed i Gradi di Vincolo:

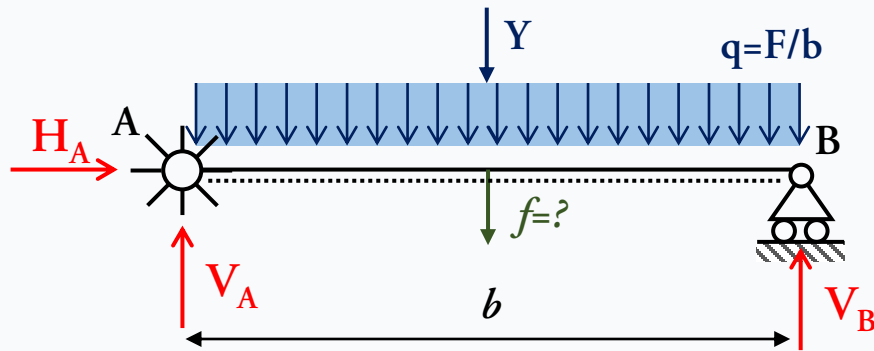
1.  $GDL = 3 \times 1 = 3$
2. GDV:
  - Punto A: 2 cerniera a terra;
  - Punto B: 1 carrello a terra;

$$GDV = 3$$

-- Struttura isostatica --

# Spostamenti struttura isostatica

## PUNTO 2: AGGIUNTA DELLA FORZA Y DI TEST E ANALISI STRUTTURALE

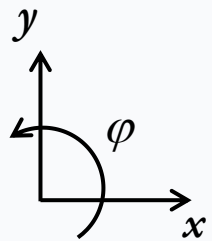


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & H_A = 0 \\ \sum F_y = 0 & V_A + V_B - F - Y = 0 \\ \sum M_A = 0 & V_B b/2 - F b/2 - Y b/2 = 0 \end{cases}$$

$$H_A = 0 \quad V_A = F/2 + Y/2 \quad V_B = F/2 + Y/2$$

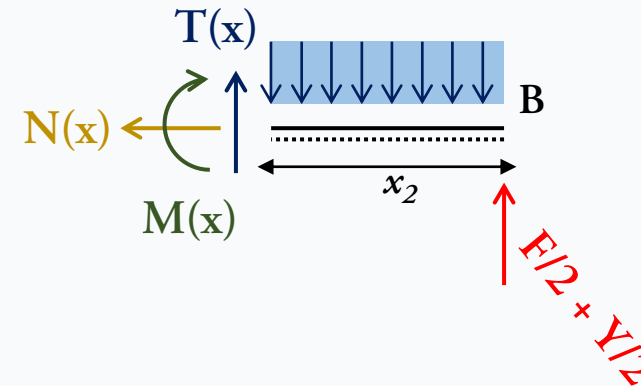
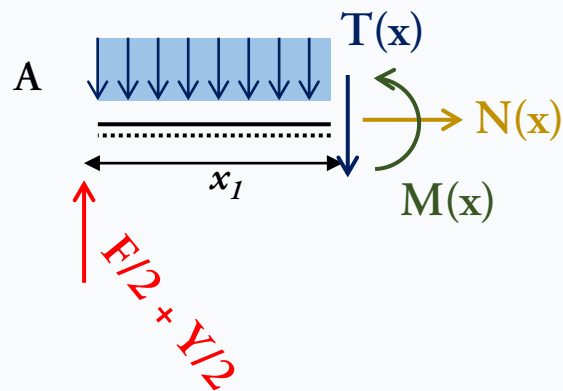
Quanto vale lo spostamento verticale del punto di mezzeria della trave A-B?

In questo tipo di applicazione la struttura 0 è quella associata ai soli carichi esterni noti, la struttura \* è quella caricata dalla sola forza Y di valore unitario.



# Spostamenti struttura isostatica

## PUNTO 2: AGGIUNTA DELLA FORZA Y DI TEST E ANALISI STRUTTURALE



$$\begin{cases} \sum F_N = 0 & N(x_1) = 0 \\ \sum F_T = 0 & T(x_1) + q x_1 - F/2 - Y/2 = 0 \\ \sum M = 0 & M(x_1) + q x_1^2/2 - F x_1/2 - Y x_1/2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum F_N = 0 & N(x_2) = 0 \\ \sum F_T = 0 & T(x_2) - q x_2 + F/2 + Y/2 = 0 \\ \sum M = 0 & M(x_2) + q x_2^2/2 - F x_2/2 - Y x_2/2 = 0 \end{cases}$$

# Spostamenti struttura isostatica

## PUNTO 3: PARTIZIONAMENTO IN SOTTOSTRUTTURE

Componente \* delle reazioni vincolari (coefficiente di Y)

$$H_A^* = 0 \quad V_A^* = 1/2 \quad V_B^* = 1/2$$

Componente 0 del momento flettente (carichi noti)

$$M^0(x_1) = -q x_1^2/2 + F x_1/2 + Y x_1/2 = 0 \quad M^0(x_2) = -q x_2^2/2 + F x_2/2 + Y x_2/2 = 0$$

Componente \* del momento flettente (coefficiente di Y)

$$M^*(x_1) = x_1/2 = 0 \quad M^*(x_2) = x_2/2 = 0$$

# Spostamenti struttura isostatica

## PUNTO 4: SCRITTURA DEL PLV

$$\textcircled{L_e} = \textcircled{L_i} \rightarrow L_e = L_i^{\text{aste}} + L_i^{\text{mol. est.}} + L_i^{\text{mol. rot.}}$$

$$L_e = \sum_{i=1}^{\text{num. RV}} Rv^* \cdot \Delta_i$$

In questo particolare esempio risulta:  $f = \frac{5}{384} \frac{qb^4}{EI}$

$$L_i^{\text{aste}} = \sum_{i=1}^{\text{num. aste}} \int_0^{l_i} N^*(x_i) \cdot \epsilon^{th} + M^*(x_i) \cdot \left( \frac{M^0(x_i)}{EI} \pm \chi^{th} \right) dx$$

$$L_i^{\text{mol. est.}} = \sum_{i=1}^{\text{num. mol. est.}} \frac{F_i^0 \cdot F_i^*}{k_i}$$

$$L_i^{\text{mol. rot.}} = \sum_{i=1}^{\text{num. mol. rot.}} \frac{M_i^0 \cdot M_i^*}{k_i}$$



# ANALISI STATICA DELLE STRUTTURE BIDIMENSIONALI CON IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

*Grazie per  
l'attenzione!*