

# ANALISI STATICA DELLE STRUTTURE BIDIMENSIONALI ISOSTATICHE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

# Analisi statica delle strutture isostatiche piane



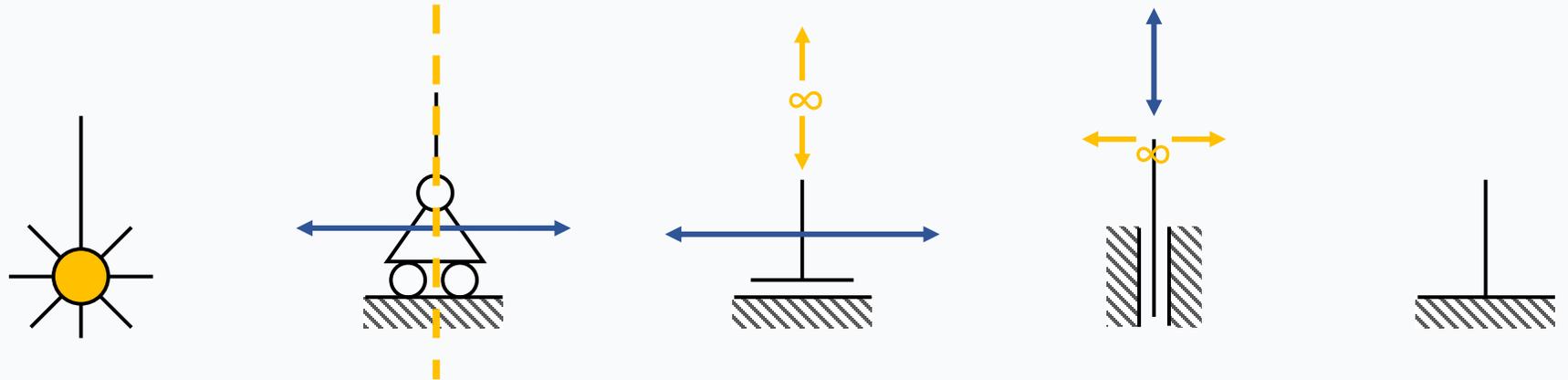
# Analisi statica delle strutture isostatiche piane



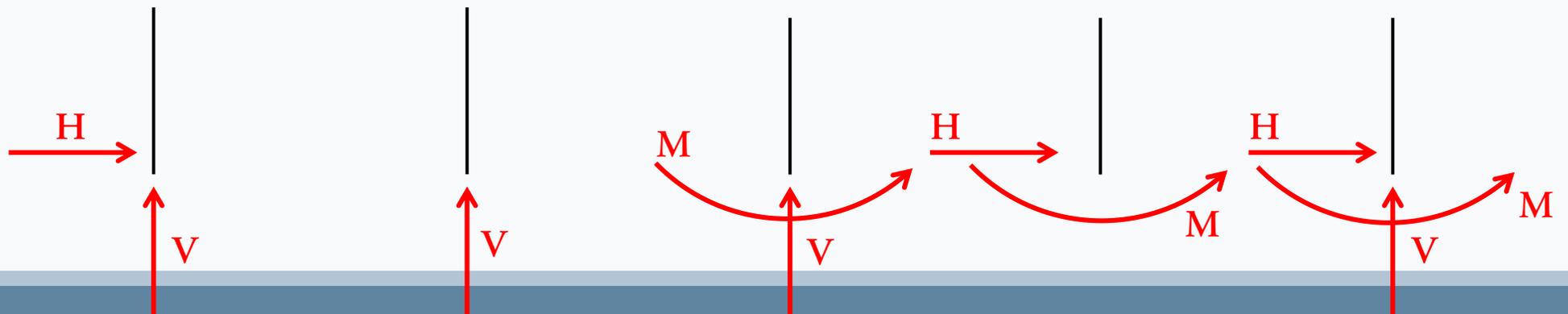
# Richiami teorici – calcolo reazioni vincolari

DALL'ASPETTO CINEMATICO (POSSIBILITÀ DI MOVIMENTO) ALL'ASPETTO STATICO (FORZE TRASMESSE)

ASPETTO  
CINEMATICO

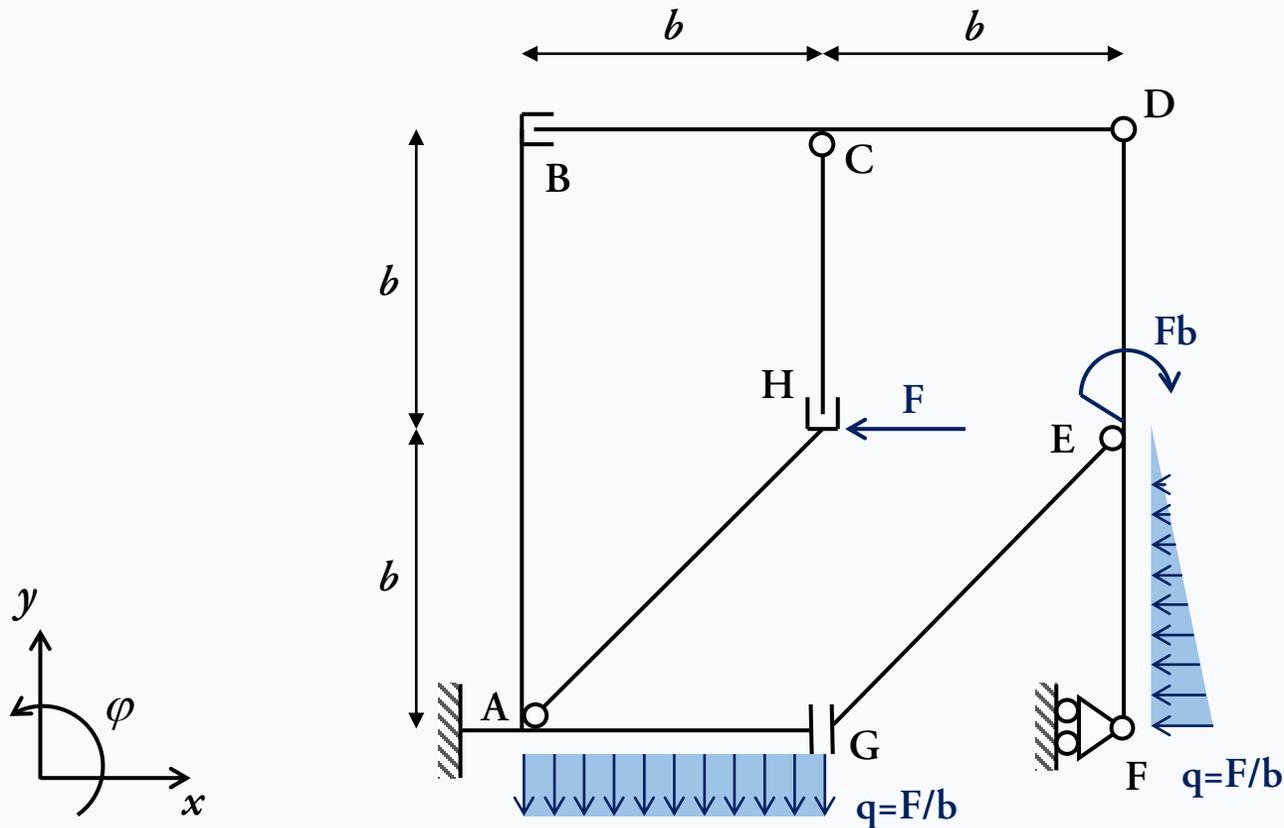


ASPETTO  
STATICO



# Esempio di applicazione

## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

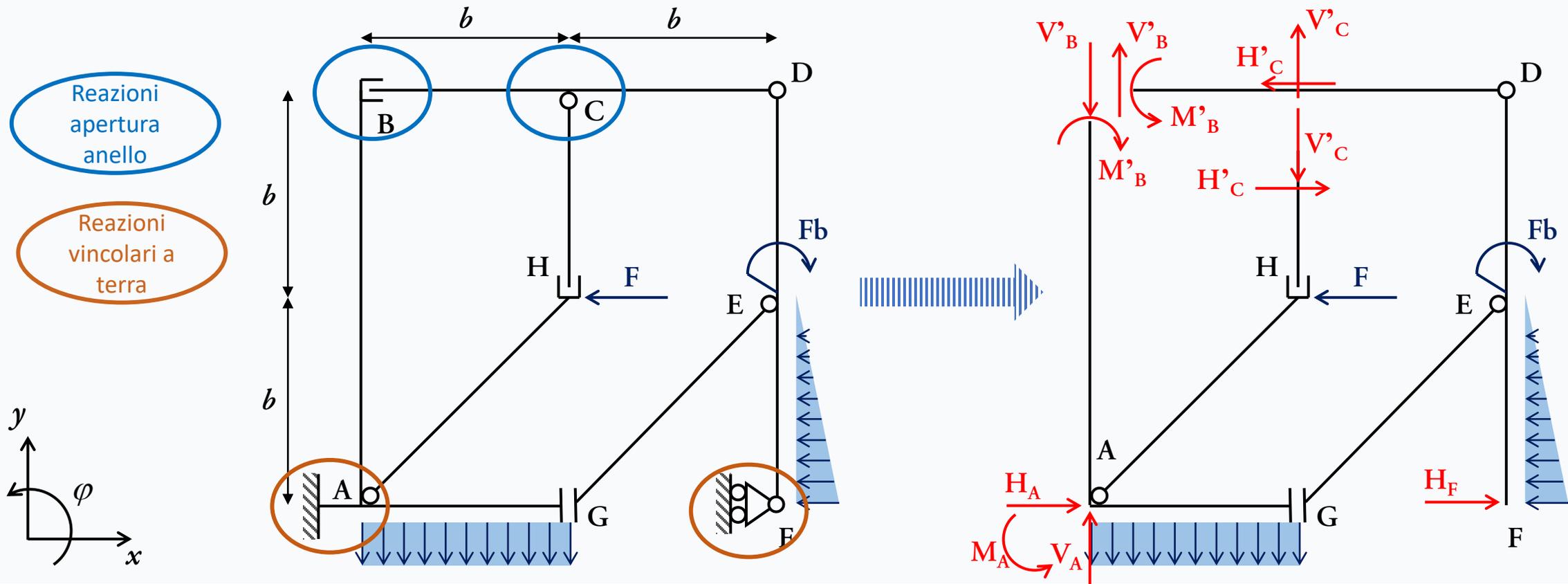


Assegnato lo schema strutturale dobbiamo effettuare alcune operazioni preliminari:

1. Analisi cinematica (conferma dell'isostaticità e studio della labilità);
2. Se struttura isostatica:
  - a) Mettiamo in evidenza le reazioni vincolari esterne;
  - b) Apriamo almeno una volta tutti gli anelli chiusi e mettiamo in evidenza le reazioni vincolari interne.

# Esempio di applicazione

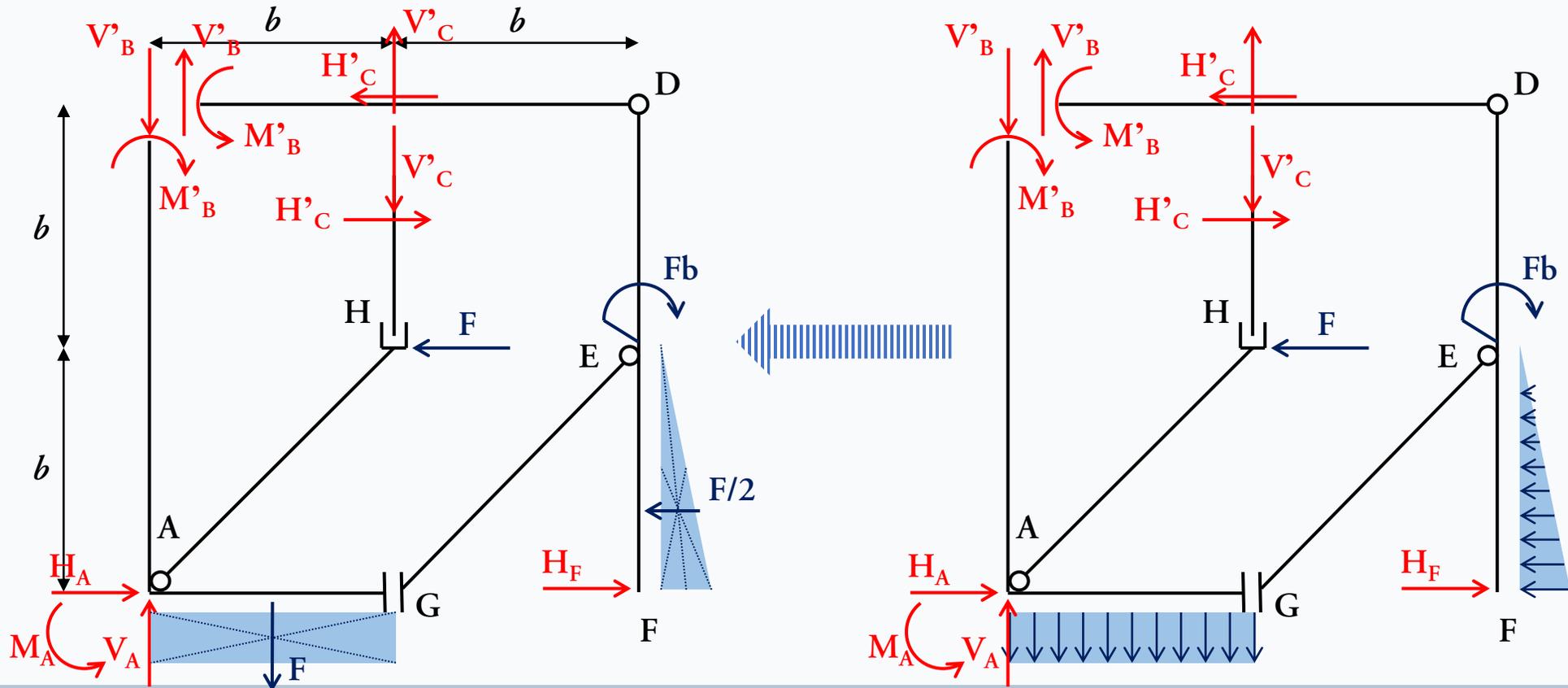
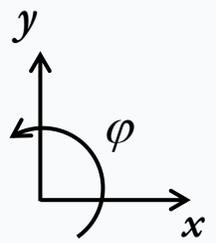
## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



# Esempio di applicazione

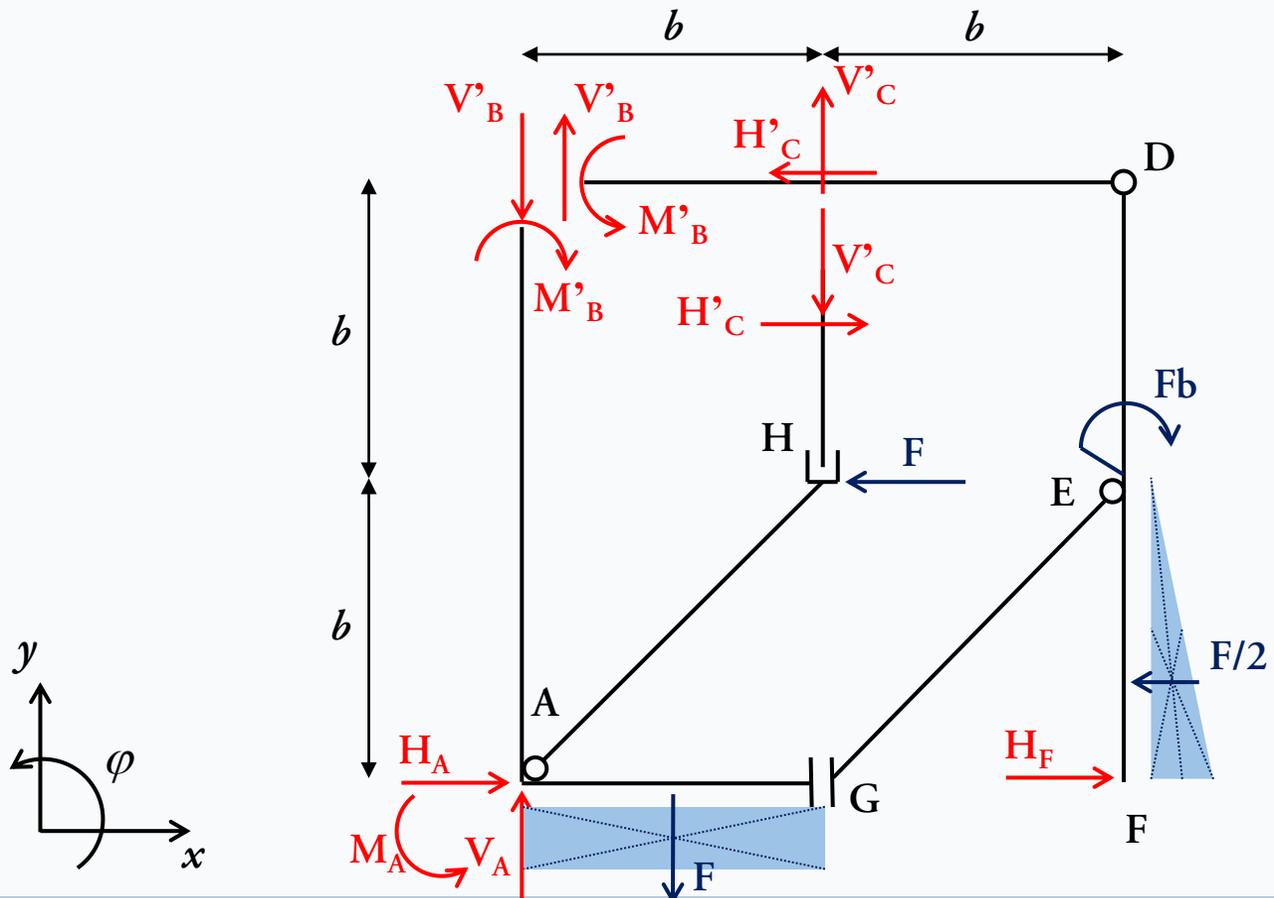
## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI

Condensando le forze distribuite per una più facile lettura



# Esempio di applicazione

## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Scriviamo le equazioni di **equilibrio globale**  
(nella quale non compaiono le reazioni interne perché globalmente auto-equilibrate)

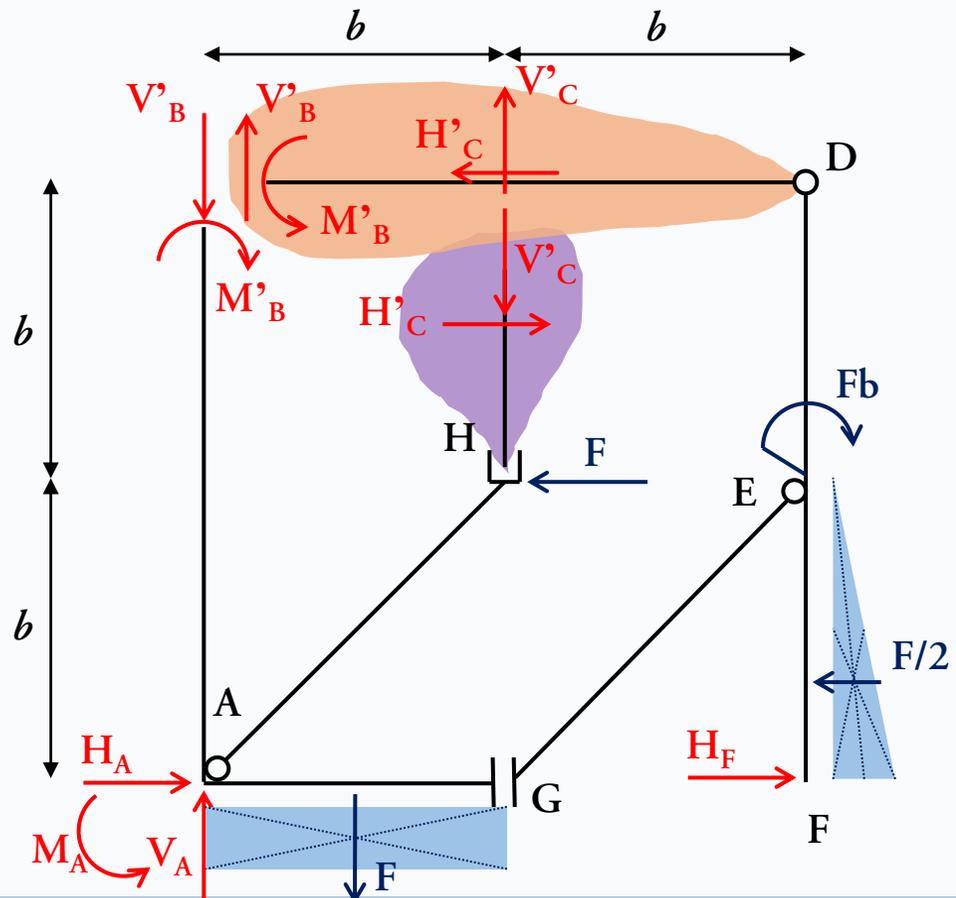
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 & H_A + H_F - F - F/2 = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & V_A - F = 0 \\ \Sigma M_A = 0 & M_A - F \cdot b/2 + F \cdot b + F/2 \cdot b/3 - F \cdot b = 0 \end{cases}$$

Le equazioni globali non sono sufficienti! Troppe incognite (4) e solo tre equazioni...

Devo aggiungere equazioni di equilibrio locale: mi metto in ogni vincolo interno e scrivo l'equazione locale di equilibrio sulla porzione di struttura che parte e torna vincolo in oggetto passando per l'estremo libero più vicino.

# Esempio di applicazione

## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Scriviamo le equazioni di **equilibrio locale**

1° Equazione: punto un asola in D (cerniera, quindi punto a momento nullo) che coinvolge la porzione di struttura che va da D all'estremo B.

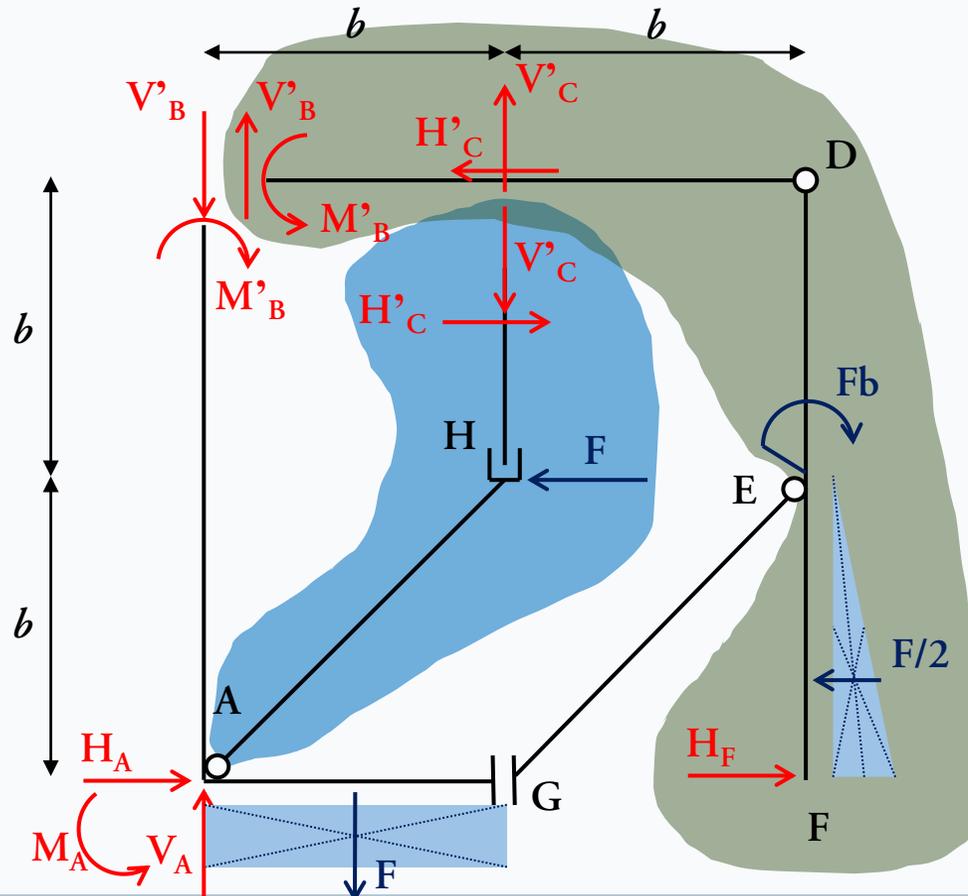
$$\Sigma M_D^{DB} = 0 \rightarrow M_B - V_B \cdot 2b - V_C \cdot b = 0$$

2° Equazione: punto un asola in H (manicotto, quindi punto a forza verticale nulla) che coinvolge la porzione di struttura che va da H all'estremo C.

$$\Sigma F_y^{HC} = 0 \rightarrow -V_C = 0$$

# Esempio di applicazione

## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Scriviamo le equazioni di **equilibrio locale**

3° Equazione: punto un asola in A (cerniera, quindi punto a momento nullo) che coinvolge la porzione di struttura che va da A all'estremo C.

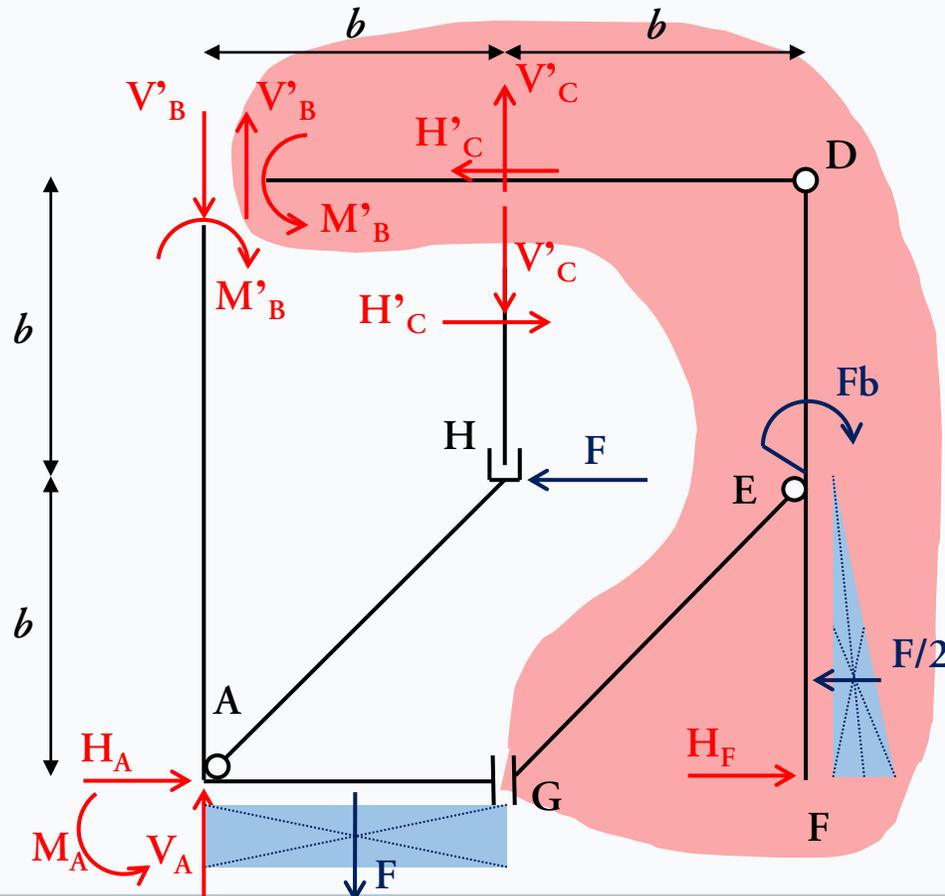
$$\Sigma M_A^{AC} = 0 \rightarrow H_C \cdot 2b + F \cdot b - V_C \cdot b = 0$$

4° Equazione: punto un asola in E (cerniera, quindi punto a momento nullo) che coinvolge la porzione di struttura che va da E agli estremi B e F.

$$\Sigma M_E^{EFB} = 0 \rightarrow -V_B \cdot 2b - V_C \cdot b - H_C \cdot b + \\ -Fb - F/2 \cdot 2/3b + H_F \cdot b = 0$$

# Esempio di applicazione

## CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI



Scriviamo le equazioni di **equilibrio locale**

5° Equazione: punto un asola in G (pattino, quindi punto a forza verticale nulla) che coinvolge la porzione di struttura che va da G agli estremi F e B.

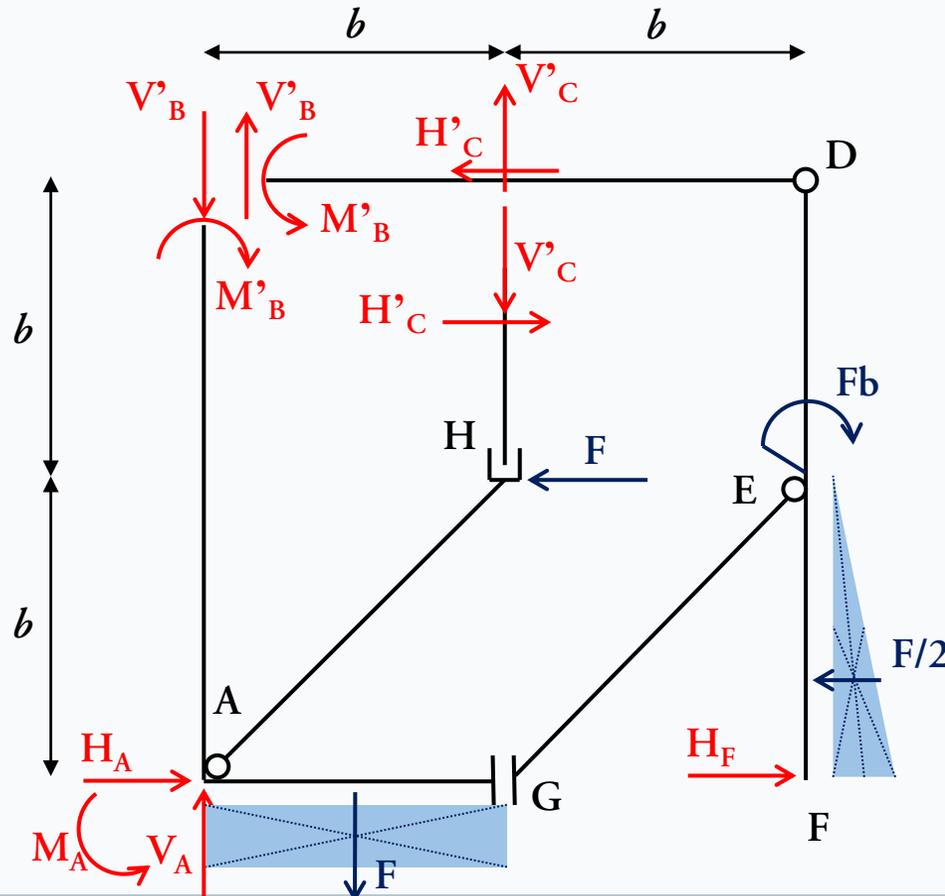
$$\sum F_y^{GFB} = 0 \rightarrow V_B + V_C = 0$$

Avendo impostato le 3 equazioni locali e le 5 globali posso risolvere il sistema e ottenere le 8 incognite.

$$\begin{aligned} H_A &= 2/3F & V_A &= F & M_A &= 1/3Fb^2 & H_F &= 5/6F \\ H_C &= -1/2F & V_C &= 0 & V_B &= 0 & M_B &= 0 \end{aligned}$$

# Esempio di applicazione

POSSIAMO CONTROLLARE I RISULTATI OTTENUTI NEL CALCOLO DELLE RV??



Si! Scriviamo un'equazione di equilibrio ai momenti attorno ad un punto che coinvolga tutte le reazioni a terra e appuriamo che risulti nullo.

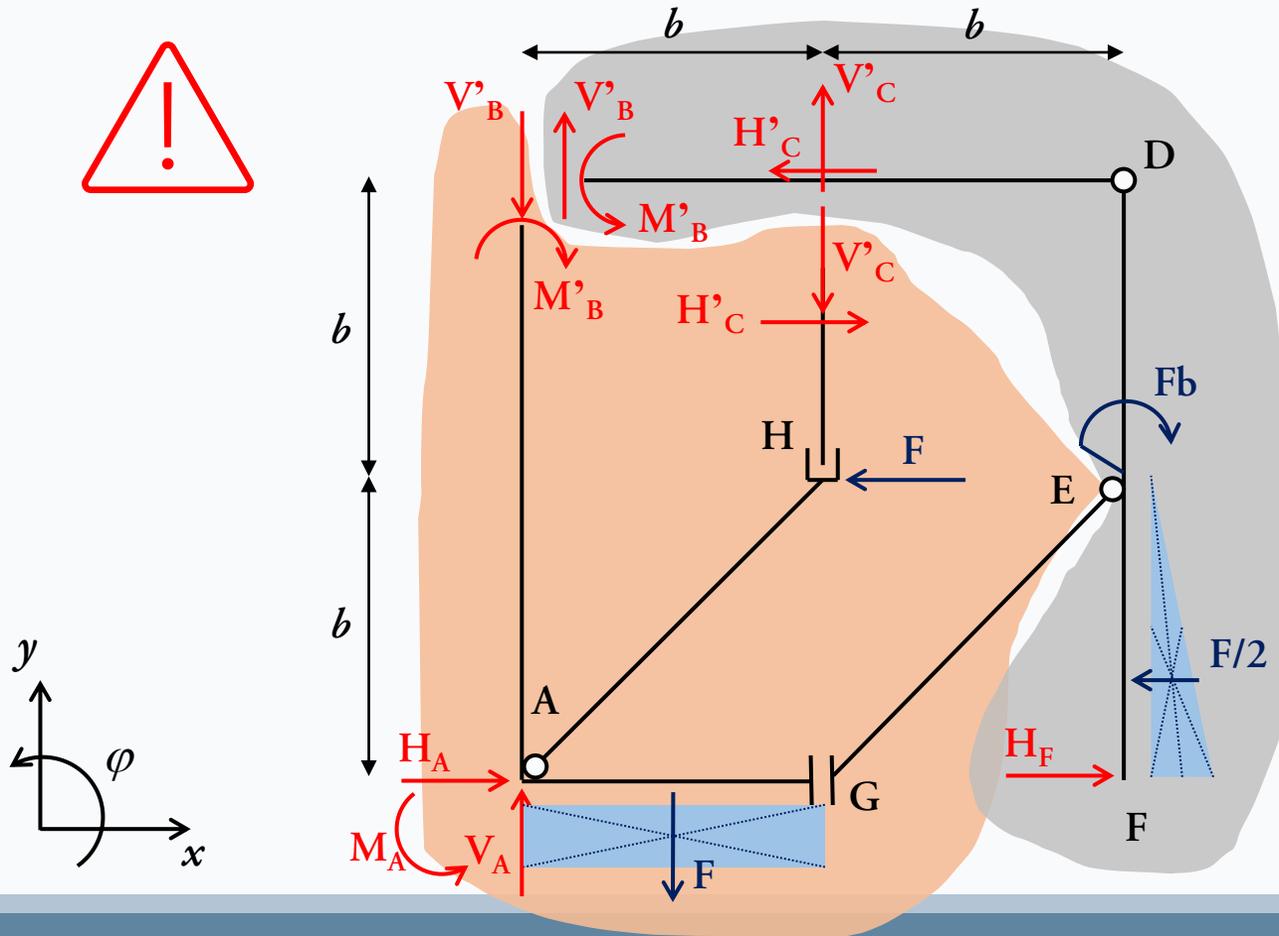
$$M_C =? \quad -F \cdot b + F \cdot b/2 - F \cdot b - F/2 \cdot (5/3b) + H_A \cdot 2b + H_F \cdot 2b + M_A - V_A \cdot b = 0$$

Che conduce all'identità  $0=0$ !

Nota: cerchiamo sempre di scegliere un punto di controllo che mobiliti il numero maggiore di incognite.

# Esempio di applicazione

COSA NON FARE >>> NON SCRIVERE DUE EQUAZIONI LINEARMENTE DIPENDENTI

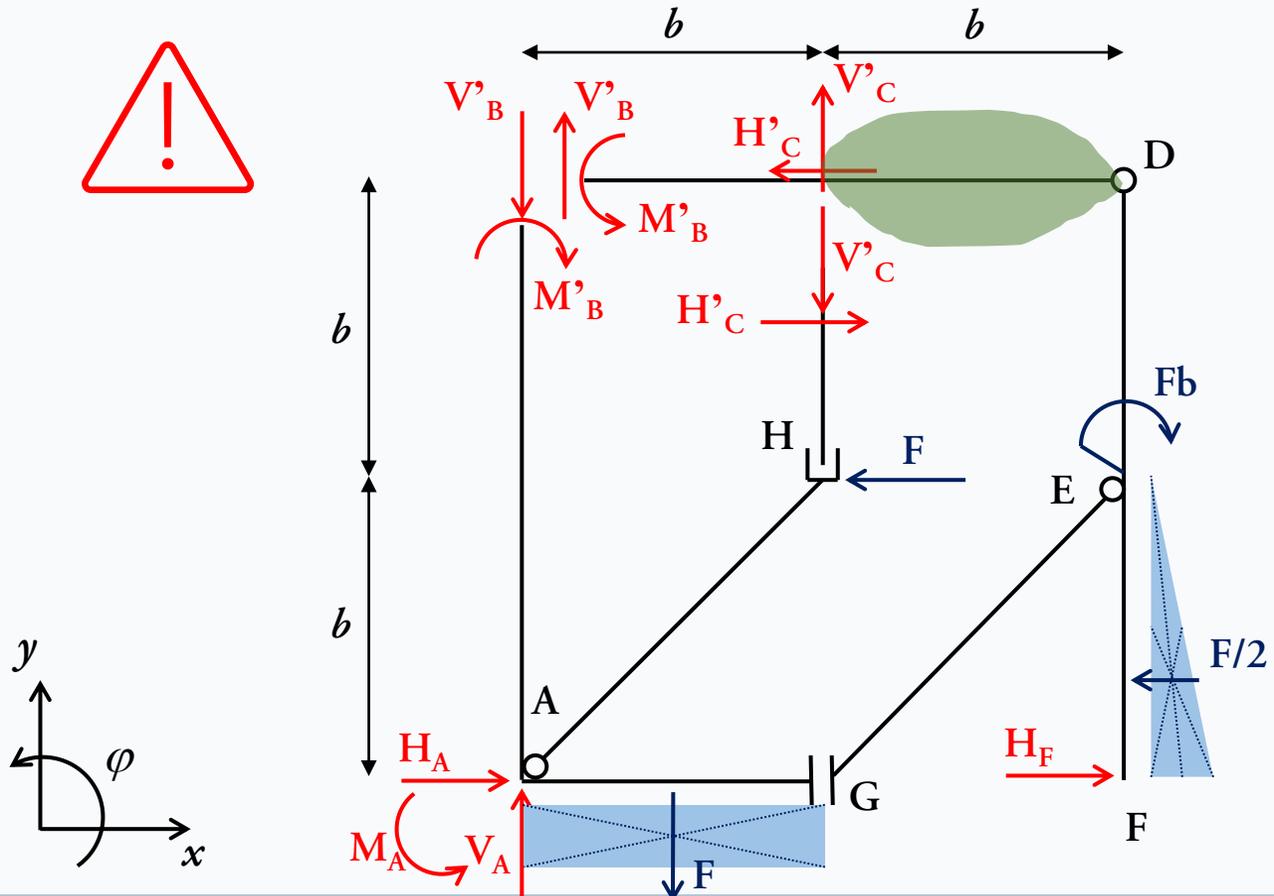


Se scelgo come equazione ausiliaria di equilibrio l'annullamento del momento attorno al punto E della porzione BEF non posso scegliere come ulteriore equazione l'annullamento del momento attorno al punto E dell'altra parte di struttura perché queste due equazioni (seppur da sole non tra di loro dipendenti) saranno dipendenti nel sistema globale di  $n$  equazioni in  $n$  incognite.

Con la prima equazione impongo che la parte BEF non ha rotazione relativa rispetto alla seconda parte di struttura. Con la seconda equazione scriverei che la seconda parte di struttura non ha rotazioni relative rispetto alla parte BEF (ovvero la stessa cosa della prima equazione).

# Esempio di applicazione

COSA NON FARE >>> L'ASOLA NON PUÒ INTERCETTARE LA STRUTTURA



Un'asola che parte dal punto D non può considerare solo la parte DC perché in C non abbiamo un estremo libero e la continuazione della struttura non permette all'asola di chiudersi.

**Regola della penna:** quando traccio un'asola devo partire dal vincolo considerato e ritornare ad esso senza che la penna si sollevi dal foglio o intersechi elementi strutturali.

# Analisi statica delle strutture isostatiche piane



# Richiami teorici – calcolo azioni interne

---

## AZIONI INTERNE IN STRUTTURE BIDIMENSIONALI

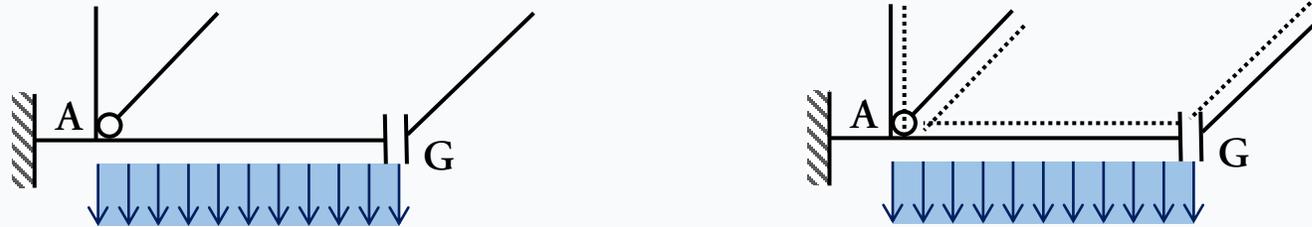
All'interno di ogni struttura bidimensionale piana costituita da elementi di trave sono presenti tre azioni che consentono il rispetto dell'equilibrio di ogni sezione nei confronti dei carichi esterni. Queste sono:

- Azione normale  $N$ : diretta come l'asse della trave, positiva se di trazione e negativa se di compressione;
- Azione di taglio  $T$ : diretta ortogonalmente all'asse della trave, positiva se oraria e negativa se antioraria;
- Azione di momento flettente  $M$ : momento interno alla trave e la cui convenzione verrà chiarita successivamente (non esiste una convenzione assoluta come per azione assiale e taglio ma è importante disegnare i grafici «dalla parte delle fibre tese»).

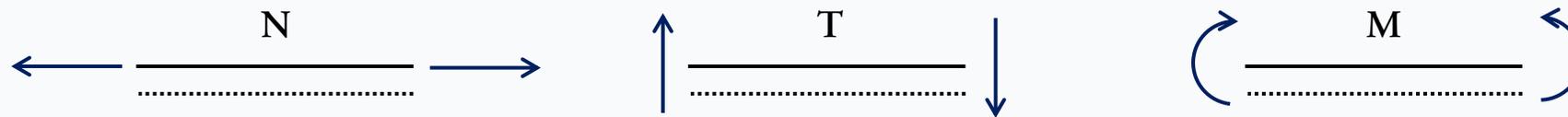
# Richiami teorici – calcolo azioni interne

## AZIONI INTERNE IN STRUTTURE BIDIMENSIONALI: PROCEDURA OPERATIVA

1. Accanto alle aste si disegna un tratteggio utile per fissare le convenzioni di segno sul singolo elemento strutturale (il lato nel quale disegno il tratteggio è del tutto arbitrario ma lo devo poi conservare fino alla fine);



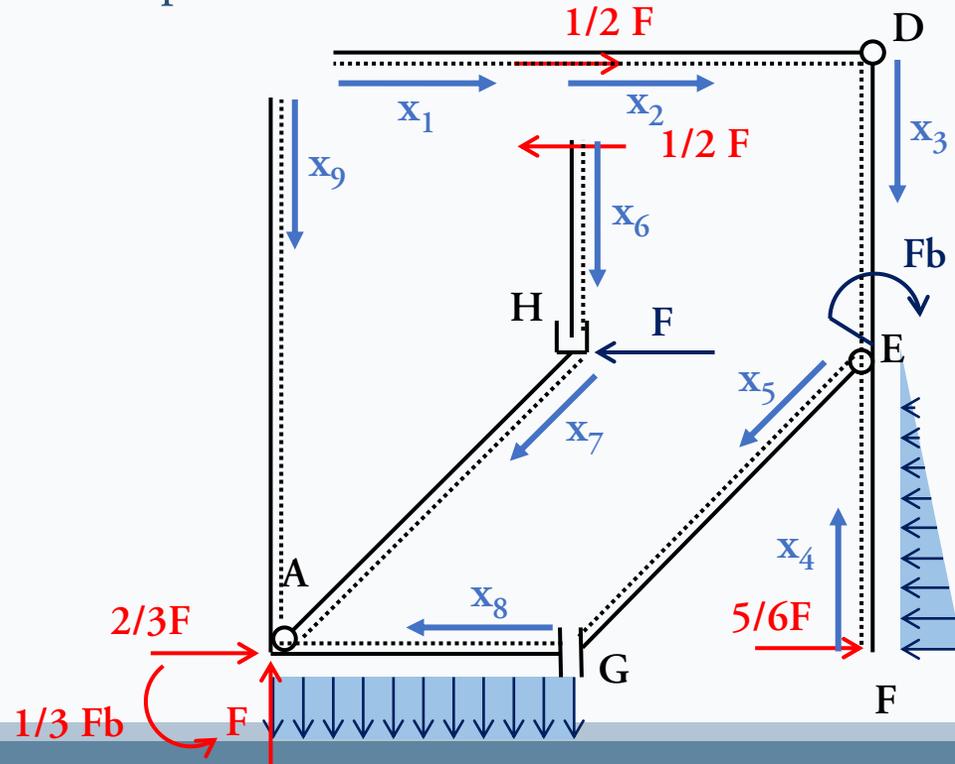
2. Si definisce la convenzione di segno sulle azioni interne (azioni assiali  $N$  positive se di trazione, azioni di taglio  $T$  positive se orarie, momenti flettenti  $M$  positivi se tendono le fibre in corrispondenza del tratteggio).



# Richiami teorici – calcolo azioni interne

## AZIONI INTERNE IN STRUTTURE BIDIMENSIONALI: PROCEDURA OPERATIVA

3. Si fissa su ogni tratto di trave un sistema di ascisse in grado di determinare in modo univoco la posizione considerata.



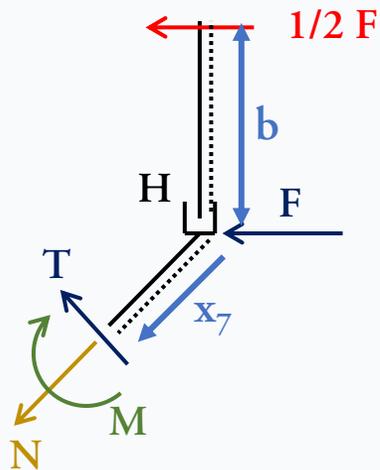
4. Si spezza la struttura in corrispondenza di un qualsiasi punto interno al singolo tratto considerato mettendo in evidenza le azioni interne incognite e le forze attive e reattive esterne.

# Richiami teorici – calcolo azioni interne

## AZIONI INTERNE IN STRUTTURE BIDIMENSIONALI: PROCEDURA OPERATIVA

5. Si impongono tre equazioni scalari di equilibrio sulla porzione di struttura considerata. Nelle tre equazioni compaiono come uniche incognite le azioni interne.

Esempio: tratto  $x_7$



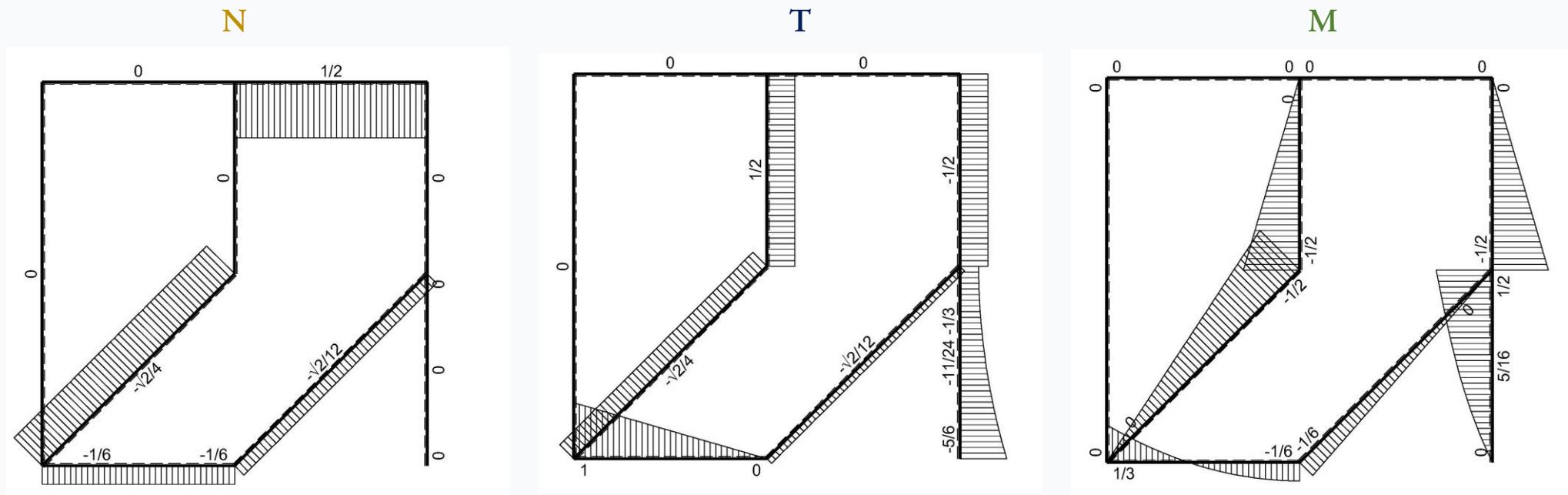
$$\begin{cases} \Sigma F_N = 0 & N + F \cdot \sqrt{2}/2 - F/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 0 \\ \Sigma F_T = 0 & T + F \cdot \sqrt{2}/2 - F/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 0 \\ \Sigma M = 0 & M - F \cdot \sqrt{2}/2 \cdot x_7 + F/2 \cdot (\sqrt{2}/2 \cdot x_7 + b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = -\sqrt{2}/4F \\ T = -\sqrt{2}/4F \\ M = -F/2 \cdot b + F/2 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot x_7 \end{cases}$$

# Richiami teorici – calcolo azioni interne

## AZIONI INTERNE IN STRUTTURE BIDIMENSIONALI: PROCEDURA OPERATIVA

6. Si procede con il tracciamento dei diagrammi. La regola di seguito utilizzata prevede, nel caso di valore positivo, di disegnare il diagramma dalla parte di asta in cui è presente il tratteggio.



# Analisi statica delle strutture isostatiche piane



# Verifica dei risultati

---

COSA DEVO OSSERVARE NEI RISULTATI IN CORRISPONDENZA DI VINCOLI INTERNI??

- cerniera interna: può essere presente taglio e azione assiale ma il momento flettente deve essere nullo;
- pattino interno: può essere presente azione assiale e momento flettente ma il taglio deve essere nullo;
- manicotto interno: può essere presente taglio e momento flettente ma l'azione assiale deve essere nulla.

COSA DEVO OSSERVARE DOVE SONO PRESENTI FORZE O MOMENTI CONCENTRATI??

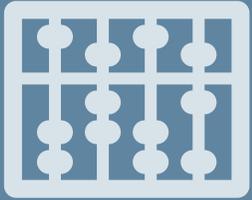
- presenza di una forza concentrata e diretta parallelamente all'asse della trave: il diagramma dell'azione assiale presenta un salto pari all'intensità della forza concentrata;
- presenza di una forza concentrata e diretta ortogonalmente all'asse della trave: il diagramma del taglio presenta un salto pari all'intensità della forza concentrata;
- presenza di un momento flettente concentrato: il diagramma del momento presenta un salto pari all'intensità della momento concentrato;

# Verifica dei risultati

---

EQUILIBRIO AI NODI INTERNI: OGNI SINGOLO NODO DEVE RISULTARE EQUILIBRATO

- Si estrae ogni singolo nodo
- Si introducono le forze concentrate agenti sul nodo e le sollecitazioni ottenute dai diagrammi
- Si verifica che la sommatoria delle forze orizzontali, verticali e momenti di tutte le azioni (esterne ed interne) risulti nulla.



# ANALISI STATICA DELLE STRUTTURE BIDIMENSIONALI ISOSTATICHE

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)  
URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

*Grazie per  
l'attenzione!*