

# ANALISI CINEMATICA DELLE STRUTTURE BIDIMENSIONALI

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

# LIVELLI DI ANALISI IN UNA STRUTTURA

---

## CINEMATICA, STATICA E DINAMICA STRUTTURALE

### ANALISI CINEMATICA

Studio della risposta cinematica della struttura (grado di vincolo e di libertà, assenza o presenza di moti rigidi);

### ANALISI STATICA

Studio della trasmissione di forze e coppie costanti nel tempo all'interno della struttura (reazioni vincolari, azioni interne). Possiamo trattare anche forze dipendenti dal tempo solo se modellabili come quasi-statiche.

### ANALISI DINAMICA

Studio della trasmissione di forze e coppie variabili nel tempo all'interno della struttura (reazioni vincolari, azioni interne), necessita della definizione delle masse come entità inerziali.

# Richiami teorici

---

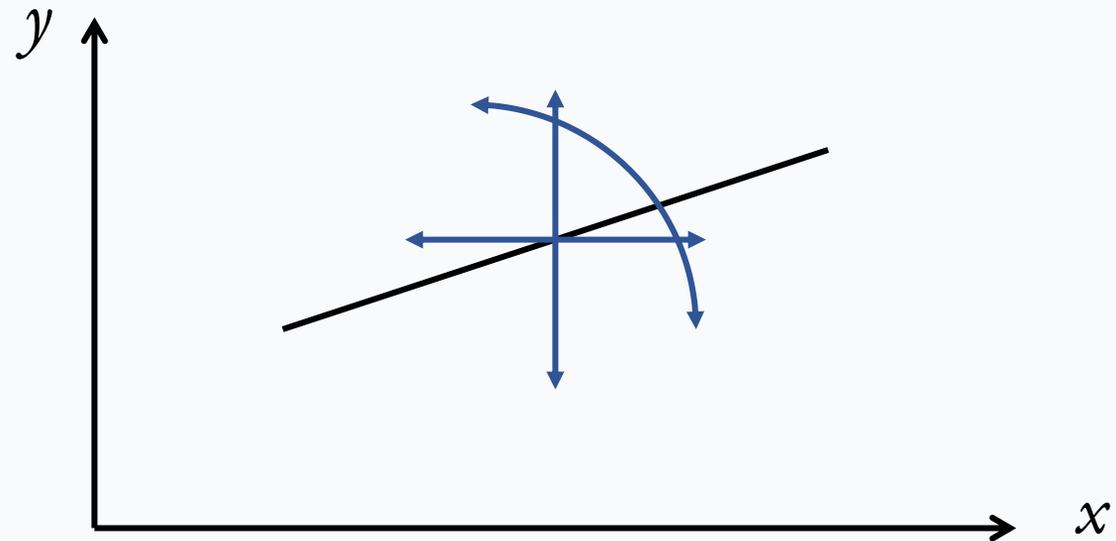
PRIMA DOMANDA: SUFFICIENZA DEL NUMERO DI VINCOLI

**Prima domanda:** il numero dei vincoli è sufficiente, ridondante o insufficiente per garantire l'equilibrio degli elementi strutturali?

Introduciamo il concetto di **Gradi di Libertà** ed il concetto di **Gradi di Vincolo**

**Gradi di Libertà:** una generica asta nel piano 2D possiede tre gradi di libertà (2 possibili traslazioni ortogonali ed una rotazione attorno all'asse uscente al piano).

Strutture nello spazio hanno 6 gradi libertà (tre traslazioni e tre rotazioni)

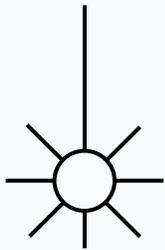


# Richiami teorici

PRIMA DOMANDA: SUFFICIENZA DEL NUMERO DI VINCOLI

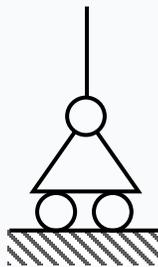
**Gradi di Vincolo:** i vincoli sono sistemi meccanici (bulloni, saldature, giunti, ...) che limitano le possibilità di movimento delle strutture. Questi sistemi fisici sono modellati con gli schemi ideali di seguito riportati.

Vincoli «a terra»: connettono la struttura con un sistema di riferimento definibile come fisso



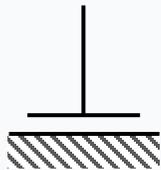
Cerniera a terra

$GDV = 2 \times n$



Carrello a terra

$GDV = 2 \times n - 1$



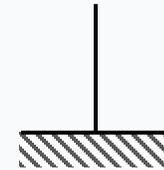
Pattino a terra

$GDV = 3 \times n - 1$



Manicotto a terra

$GDV = 3 \times n - 1$



Incastro a terra

$GDV = 3 \times n$

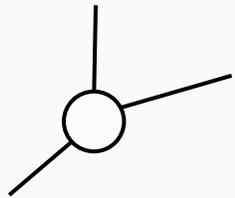
**n:** numero di aste che convergono nel vincolo

# Richiami teorici

PRIMA DOMANDA: SUFFICIENZA DEL NUMERO DI VINCOLI

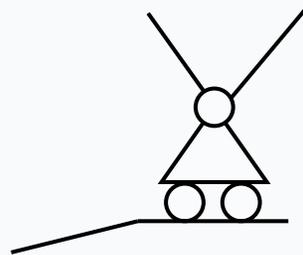
**Gradi di Vincolo:** i vincoli sono sistemi meccanici (bulloni, saldature, giunti, ...) che limitano le possibilità di movimento delle strutture. Questi sistemi fisici sono modellati con gli schemi ideali di seguito riportati.

Vincoli «interni»: connettono diverse elementi della struttura tra di loro



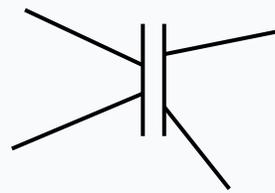
Cerniera interna

$$\underline{\text{GDV} = 2 \times (n - 1)}$$



Carrello interno

$$\underline{\text{GDV} = 2 \times n - 3}$$



Pattino interno

$$\underline{\text{GDV} = 3 \times n - 4}$$



Manicotto interno

$$\underline{\text{GDV} = 3 \times n - 4}$$

**n:** numero di aste che convergono nel vincolo

# Richiami teorici

---

PRIMA DOMANDA: SUFFICIENZA DEL NUMERO DI VINCOLI

**Classificazione della struttura:** dal confronto tra il numero dei gradi di libertà ed il numero dei gradi di vincolo possiamo classificare in tre modi diversi la struttura.

$$\text{GDL} > \text{GDV}$$

**Struttura ipostatica (macchina)**

Problema con soluzione statica ottenibile solo tramite considerazioni di equilibrio e solo se la struttura è auto – equilibrata;

$$\text{GDL} = \text{GDV}$$

**Struttura isostatica**

Problema con soluzione statica ottenibile solo tramite considerazioni di equilibrio;

$$\text{GDL} < \text{GDV}$$

**Struttura iperstatica (o ipervincolata)**

Problema con soluzione statica ottenibile solo aggiungendo alle equazioni di equilibrio ulteriori equazioni (che vedremo poi essere il «legame costitutivo» e la «congruenza»);

# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

**Seconda domanda:** appurato che una struttura è risolvibile in contesto statico (ipo autoeq., iso o iperstatica) siamo certi che in vincoli sono stati posti in modo tale da non consentire comunque un atto di moto rigido?



1 corpo rigido:	3 GDL
6 carrelli a terra:	8 GDV
Struttura 5 volte iperstatica	

.... Ma i vincoli sono messi male (esiste un centro di istantanea rotazione comune) e quindi il sistema può avere un atto di moto a corpo rigido.

In questo caso il centro di istantanea rotazione di tutti i vincoli tende all'infinito quindi si avrà una traslazione rigida.

# Richiami teorici

---

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

Questa seconda domanda prende il nome di «studio della labilità»: se la struttura può muoversi è labile



**Metodo matriciale:** scrittura della struttura in forma matriciale, molto più automatizzabile (implementato nei codici di calcolo strutturale) ma impraticabile nel calcolo manuale.

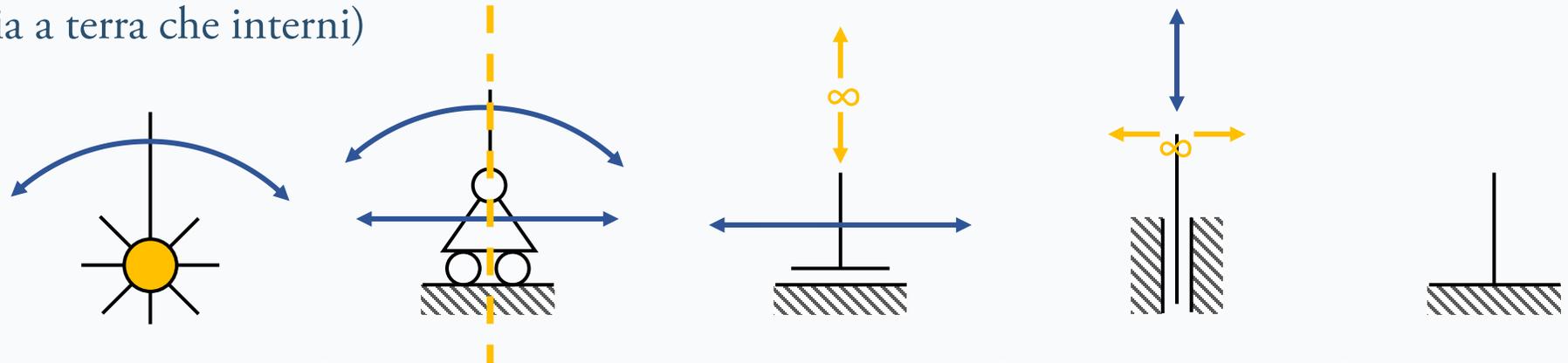
**Metodo qualitativo:** ricerca dei centri di istantanea rotazione attraverso la combinazione di equivalenze cinematiche e semplificazione progressiva della struttura.

Se la struttura fosse iperstatica procediamo prima al declassamento, ovvero alla rimozione di un numero di vincoli strettamente sufficiente a rendere la struttura isostatica, e poi appuriamo che nello schema declassato non esistano labilità.

# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

**Primo passo per lo studio della labilità:** avere ben chiaro dove sono i centri di istantanea rotazione associati ai diversi vincoli (sia a terra che interni)

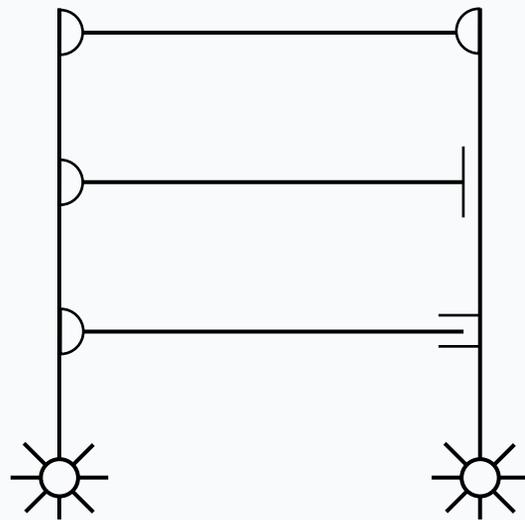


Vincolo	Cerniera terra	Carrello terra	Pattino terra	Manicot. terra	Incastro
Movimenti consentiti	Rotazione	Rotazione e traslazione	Traslazione	Traslazione	Nessun movimento
Centro istantanea rotazione	Perno della cerniera	Asse ortogonale a direzione scorrimento	Punto improprio ortogonale direz. scorrimento	Punto improprio ortogonale direz. scorrimento	Nessun centro di istantanea rotazione

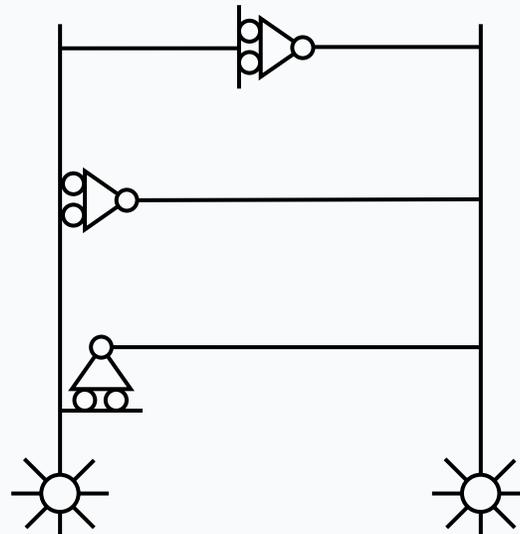
# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

**Secondo passo per lo studio della labilità:** se sulla struttura ci sono bielle generalizzate (aste cerniera-cerniera, cerniera-pattino, cerniera-manicotto) le possiamo ricondurre a carrelli equivalenti.



15 GDL – 16 GDV



6 GDL – 7 GDV

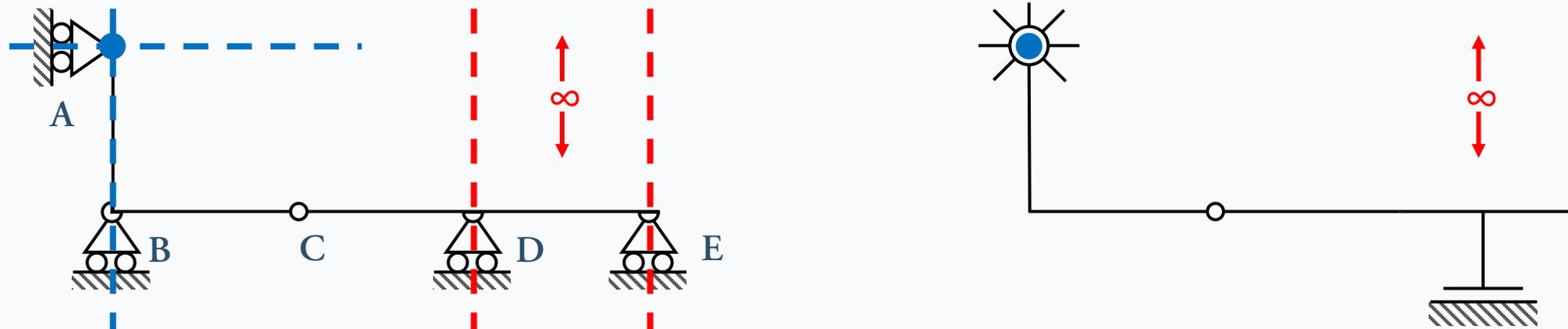
Posso sostituire la biella generalizzata con asta continua avente un carrello:

- con posizione nel punto in cui era presente la cerniera;
- con direzione di scorrimento conforme a quella dell'altro vincolo doppio

# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

Terzo passo per lo studio della labilità: se ci sono due carrelli collegati alle stesse entità cinematiche possono essere ricondotti ad un vincolo doppio equivalente.



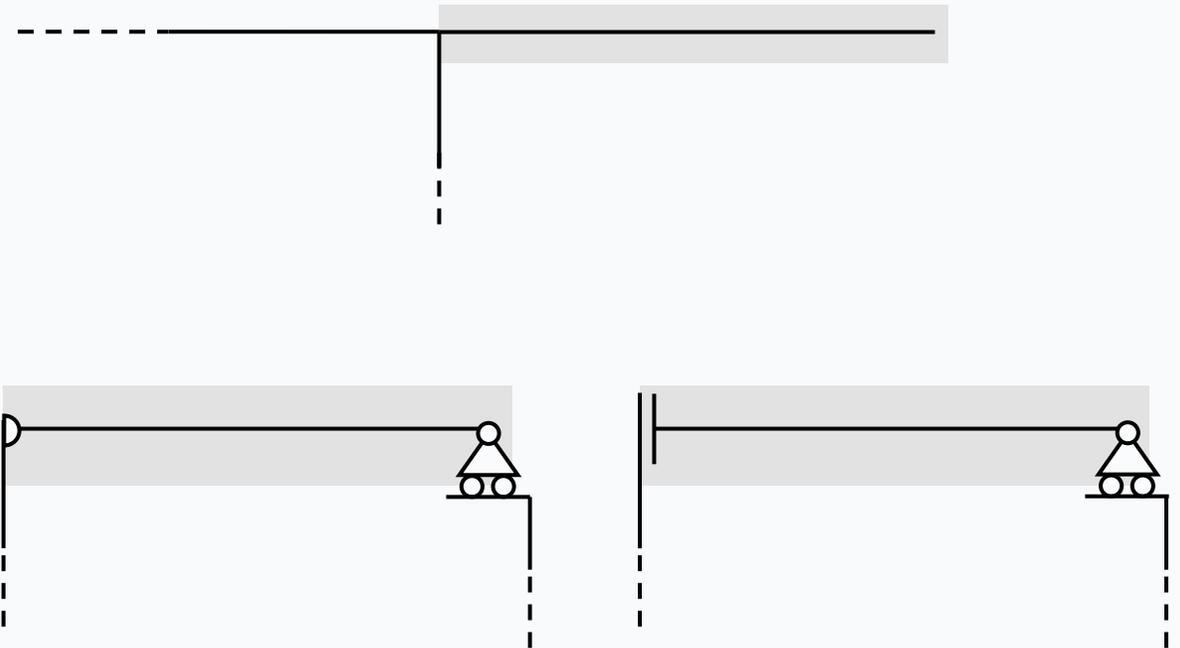
Unisco i C.I.R. di carrelli che legano le stesse aste e procedo sostituendo questi carrelli con i vincoli aventi lo stesso C.I.R. ottenuto dalla precedente unione.

# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

Quarto passo per lo studio della labilità: se ci sono **appendici isostatiche non labili** (parti singole di strutture che, prese singolarmente, sarebbero isostatiche non labili) queste possono essere eliminate.

1. **Mensole:** aste collegate tramite continuità perfetta alla restante parte di struttura e con l'altro estremo libero;
2. **Aste in semplice appoggio:** aste aventi **solo** un vincolo doppio in un estremo ed un vincolo singolo in un altro;

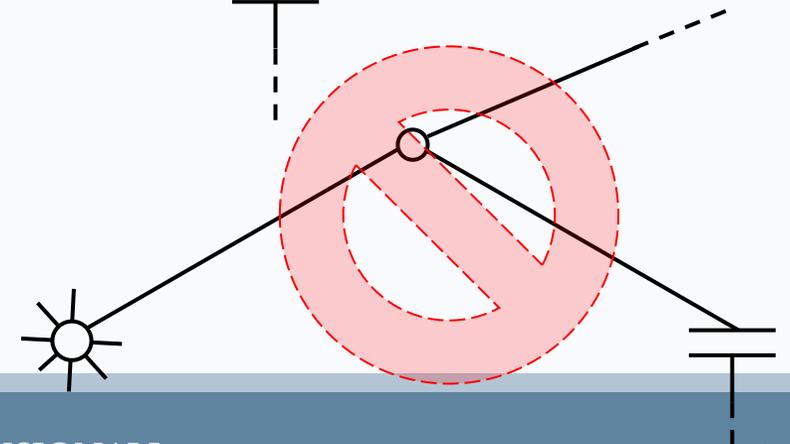
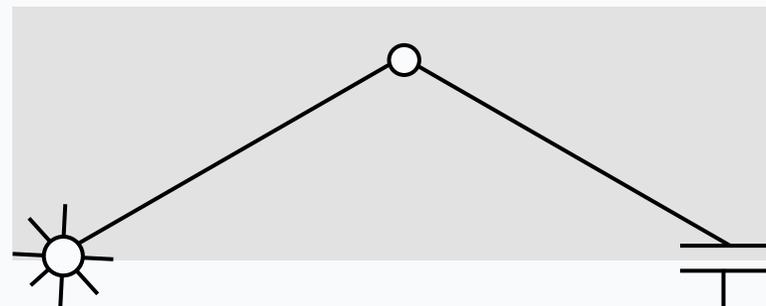
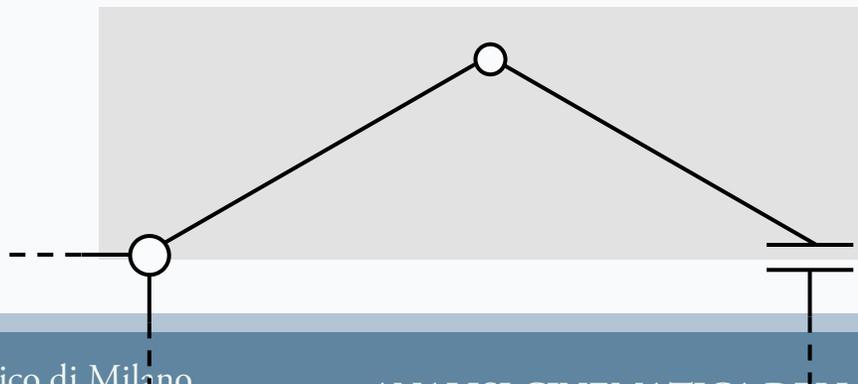


# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

Quarto passo per lo studio della labilità: se ci sono **appendici isostatiche non labili** (parti singole di strutture che, prese singolarmente, sarebbero isostatiche non labili) queste possono essere eliminate.

3. **Archi a tre cerniere:** coppia di aste aventi due vincoli doppi di estremità collegati a terra o ad altre parti di struttura ed un vincolo doppio centrale che collega **solo** le due aste.

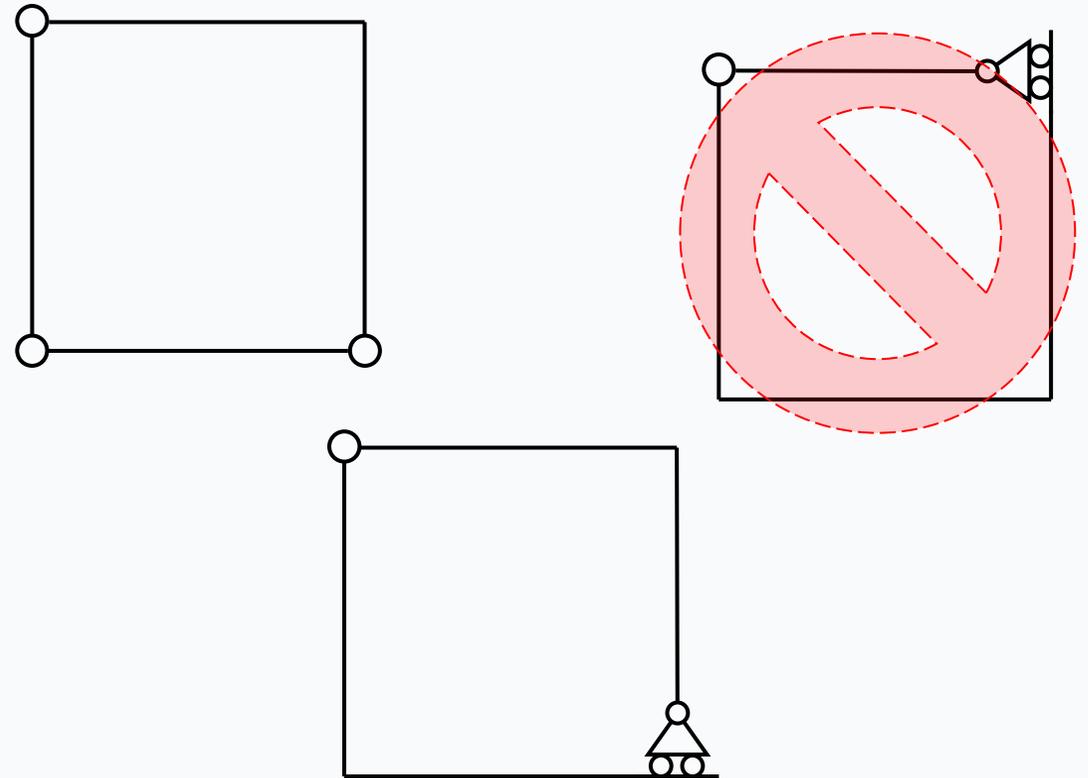


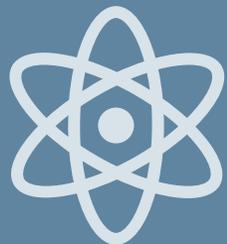
# Richiami teorici

SECONDA DOMANDA: BUON POSIZIONAMENTO DEI VINCOLI IN STRUTTURE ISO E IPER STATICHE

**Quinto passo per lo studio della labilità:** se ci sono anelli chiusi valutare se sono internamente isostatici.

- Valuto se il numero di aste e vincoli è tale da rendere l'anello isostatico:
  - a) Anello costituito da tre aste interconnesse internamente da tre vincoli doppi;
  - b) Anello costituito da due aste interconnesse da un vincolo doppio ed un vincolo semplice;
- Valuto se i vincoli sono posti in modo da non dare labilità (ovvero che non ci sono allineamenti di CIR)





# ANALISI CINEMATICA DELLE STRUTTURE BIDIMENSIONALI

RICHIAMI TEORICI PROPEDEUTICI ALLE APPLICAZIONI PRATICHE



**Nicola Cefis**

Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci, 32, Milano

E-Mail: [nicola.cefis@polimi.it](mailto:nicola.cefis@polimi.it)

URL: [www.nicolacefis.com](http://www.nicolacefis.com)

*Grazie per  
l'attenzione!*